Übungen: Mathematische Methoden der Teilchenphysik

Serie 4: *Imaginäre Masse, Lie-Gruppen und Lie-Algebren*

1. In der Klein-Gordon-Gleichung $(\Box + m^2)\varphi(x) = 0$ gilt für den Masseterm üblicherweise $m^2 \geq 0$. Betrachten Sie alternativ die *tachyonische* Gleichung

$$(\Box - \mu^2)\varphi(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \mu^2 > 0\,, \tag{1}$$

in welcher der Masseterm das 'falsche' Vorzeichen hat, und konstruieren Sie entsprechende ebene Wellenlösungen. Lassen sich aus diesen ebenen Wellen analog zum Klein-Gordon-Fall mit $m^2 \geq 0$ normierbare Wellenpakete durch ein geeignetes Fourierintegral konstruieren?

2. *Vorbetrachtung:* In einer kontinuierlichen Matrix-Lie-Gruppe $L \subseteq GL(n, \mathbb{K})$ verlaufen zwei beliebig oft differenzierbare Wege $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to L$ mit der Entwicklung $\alpha(t) = \mathbb{1} + Jt + ...$ und $\beta(t) = \mathbb{1} + Kt + ...$, wobei $\mathbb{1}$ das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist, und J, K infinitesimale Transformationen von L (Generatoren) heissen. Dann ist auch $J + K$ ein Generator, denn der Weg $\gamma : t \mapsto \alpha(t)\beta(t) = \mathbb{1} + (J + K)t + ...$ liegt auch in L. Weiter ist $\alpha(\lambda t) = \mathbb{1} + \lambda J t + ...$, also auch λJ Generator für $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Generatoren einer kontinuierlichen Matrixgruppe bilden also einen *reellen* Vektorraum $\mathcal{L}$.

   Zeigen Sie:
   Der Kommutator zweier Generatoren $[J, K] = JK - KJ$ ist wieder ein Generator.
   Hinweis: Betrachten Sie die Entwicklungen der Wege in L
   $\alpha(t) = \mathbb{1} + Jt + Wt^2 + ...,\ \alpha(t)^{-1} = \mathbb{1} - Jt + Yt^2 + ...,$
   $\beta(t) = \mathbb{1} + Kt + Xt^2 + ...,\ \beta(t)^{-1} = \mathbb{1} - Kt + Zt^2 + ...,$
   sowie die Entwicklungen von
   $\alpha(t)\alpha(t)^{-1}$, $\beta(t)\beta(t)^{-1}$, $\alpha(t)\beta(t)$, $\alpha(t)^{-1}\beta(t)^{-1}$, und $\alpha(t)\beta(t)\alpha(t)^{-1}\beta(t)^{-1}$.

3. Geben Sie explizit drei Generatoren für Lorentz-Boosts in x^1-, x^2- und x^3-Richtung und drei Generatoren für Rotationen um die x^1-, x^2- und x^3-Achse an. Die Matrixeinträge sollen nur die Zahlenwerte 0 und ± 1 enthalten. Geben Sie sämtliche Vertauschungsrelationen an, welche die von Ihnen gefundenen Basismatrizen der Lie-Algebra $so^+(1,3)$ (beziehungsweise der Lie-Algebra der rellen Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$) erfüllen.

4. Geben Sie 8 differenzierbare Wege $\gamma_{1,...,8}$ in der speziellen unitären Matrixgruppe $SU(3)$ mit $\gamma_i(0) = \mathbb{1}_3$ an, deren Ableitungen $\dot{\gamma}_i(0)$ acht linear unabhängige Generatoren in der $su(3)$ sind.

Abgabe der Übungen am 15. Dezember 2025 oder nach Absprache.

1.12.2025, Andreas Aste