Übungen: Mathematische Methoden der Teilchenphysik

Serie 3: *Das klassische skalare Feld und die Klein-Gordon-Gleichung*

1. Skalare Modelltheorie (SM) der Elektrodynamik: Koppelt man ein massives *geladenes* Skalarfeld φ an ein *masseloses* und *neutrales* Skalarfeld A durch einen möglichst einfachen reellen Wechselwirkungsterm $\mathscr{L}_{int}$ gemäss der Lagrange-Dichte († $\sim$ komplexe Konjugation)

$$\mathscr{L}_{SM} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi + \frac{1}{2}\partial_\mu A \partial^\mu A + \underbrace{g\varphi^\dagger \varphi A}_{\mathscr{L}_{int}},$$

   so definiert man eine der (Quanten-)Elektrodynamik eines geladenen massiven (Anti-)Teilchens (z.B. dem Elektron und dem Positron) in Wechselwirkung mit dem mit masselosen Photonen verknüpften elektromagnetischen Strahlungsfeld in gewisser Hinsicht ähnelnde skalare Theorie. g ist die (dimensionsbehaftete) Kopplungskonstante.

   Geben Sie die aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgenden Bewegungsgleichungen für φ, $\varphi^\dagger$ und A an. Erfüllt die Klein-Gordon-Stromdichte $j^\mu = ig(\varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^\dagger)$ die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$?

2. Die positiv definite Energiedichte des reellen (neutralen) freien Klein-Gordon-Feldes ist mit der in der Literatur üblichen Normierung durch

$$T_n^{00} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_n^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi_n)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi_n^2$$

   gegeben. Betrachten wir eine reelle ebene Welle in einem Würfel $W = \{0 \leq x^k \leq L \mid k = 1,2,3\}$ mit Volumen $V = L^3$ und periodischen Randbedingungen $\varphi_n(x^0, 0, x^2, x^3) = \varphi_n(x^0, L, x^2, x^3)$, $\varphi_n(x^0, x^1, 0, x^3) = \varphi_n(x^0, x^1, L, x^3)$ und $\varphi_n(x^0, x^1, x^2, 0) = \varphi_n(x^0, x^1, x^2, L)$, so lässt sich mit einem zu bestimmenden Normierungsfaktor N_n eine Einteilchen-Wellenfunktion darstellen durch ($kx = k_\mu x^\mu$)

$$\varphi_n(x) = N_n\big(e^{-ikx} + e^{+ikx}\big) = 2N_n \cos kx$$

   mit geeigneten Wellenzahlen $\vec{k} = 2\pi\vec{n}/L$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$, und der Teilchenenergie $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

   Berechnen sie den Normierungsfaktor N_n so, dass die Energie des Feldes im Würfelvolumen der Einteilchenenergie $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ entspricht.

3. Die masselose φ^4-Theorie weist als klassische Feldtheorie wegen der Abwesenheit eines eine Längenskala definierenden Masseterms $\sim m^2\varphi^2$ eine Symmetrie unter einer Skalentransformation ($\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$)

$$\varphi(x) \mapsto \varphi'(x) = \sigma(\alpha)\varphi(\alpha x)$$

   auf, und zwar in dem Sinne, dass die Wirkung $S_{\varphi_0^4} = \int d^4x\, \mathscr{L}_{\varphi_0^4}(x)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathscr{L}_{\varphi_0^4}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$$

   unter der Skalentransformation invariant ist.

   Geben sie $\sigma(\alpha)$ an und zeigen sie, dass der mit der Skalensymmetrie über das Noether-Theorem verknüpfte (klassische) Strom

$$j^\mu = \partial^\mu\varphi(x^\nu\partial_\nu\varphi + \varphi) - \frac{1}{2}x^\mu\partial_\nu\varphi\partial^\nu\varphi + \frac{\lambda}{4!}x^\mu\varphi^4$$

   erhalten ist.

Abgabe der Übungen Mitte November 2026 oder nach Absprache.