

Exercises: Mathematical Methods in Particle Physics

Series 2: Lorentz Covariance and Matrix Groups

1. The relativistic Cartesian coordinates $x^\mu \sim x = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)^T$ and $x'^\mu \sim x'$ of an event in four-dimensional flat spacetime in two inertial frames IS and IS' with the same spacetime coordinate origin are transformed into each other by a Lorentz transformation $x' = \Lambda x$ or $x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu$, respectively. A scalar field, which is given in the inertial frame IS by a differentiable spacetime-dependent function $\varphi(x)$, is by definition described in IS' by the function $\varphi'(x') = \varphi(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x')$.

Derive the corresponding transformation law for the following four-component quantity:

$$v(\mu; x) := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi(x).$$

2. The components of the electromagnetic field strength tensor F follow from the electromagnetic four-potential A according to $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$, $A^\mu(x) = (\Phi(x)/c, \vec{A}(x))$, $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$, where the electric field $\vec{E}$ and the magnetic field $\vec{B}$ are given by $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{A}}$ and $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. In the following, let $c = 1$.

As a review exercise, verify explicitly that

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

and also express $F_{\mu\nu}$ and F^μ_ν in terms of these same components of the electric and magnetic fields. Finally, express the Lorentz-invariant scalar quantity $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ in terms of the $\vec{E}$ and $\vec{B}$ fields. Is it possible to construct further Lorentz-invariant (field) quantities from the $\vec{E}$ and $\vec{B}$ fields?

3. Provide a continuous path $\gamma : [0, \pi] \rightarrow SO(4, \mathbb{C})$ that connects the identity $\mathbb{1}_4 = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ in the proper *complex* Lorentz group $SO(4, \mathbb{C})$ with the spacetime inversion $PT = -\mathbb{1}_4$: $\gamma(0) = \mathbb{1}_4$, $\gamma(\pi) = -\mathbb{1}_4$, and $|\gamma| = \{\gamma(t) \mid t \in [0, \pi]\} \subset SO(4, \mathbb{C})$.

Does such a path from $\mathbb{1}_4$ to $-\mathbb{1}_4$ also exist within the (real) proper Lorentz group $SO(1, 3)$? Furthermore, explain why the proper complex Lorentz group is identified with the special orthogonal group $SO(4, \mathbb{C})$; why does one not write $SO(1, 3; \mathbb{C})$, for example?

4. The complex special orthogonal group in two dimensions is defined according to

$$SO(2, \mathbb{C}) = \{C \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid C^T C = \mathbb{1}_2, \det C = 1\}$$

.

Show that $SO(2, \mathbb{C})$ and the multiplicative group of complex numbers without zero $(\dot{\mathbb{C}}, \cdot)$ are isomorphic.

Submission of the exercises on October 26, 2026, or by arrangement.

Übungen: Mathematische Methoden der Teilchenphysik

Serie 2: Lorentzkovarianz und Matrixgruppen

- Die relativistischen kartesischen Koordinaten $x^\mu \sim x = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)^T$ und $x'^\mu \sim x'$ eines Ereignisses in der vierdimensionalen flachen Raumzeit in zwei Inertialsystemen IS und IS' mit gleichem Raumzeitkoordinatenursprung werden durch eine Lorentztransformation $x' = \Lambda x$ beziehungsweise $x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu$ ineinander übergeführt. Ein skalares Feld, welches im Inertialsystem IS durch eine differenzierbare raumzeitabhängige Funktion $\varphi(x)$ gegeben ist, wird in IS' definitionsgemäss durch die Funktion $\varphi'(x') = \varphi(x) = \varphi(\Lambda^{-1}x')$ beschrieben.

Leiten Sie das entsprechende Transformationsgesetz für die folgende vierkomponentige Grösse her:

$$v(\mu; x) := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi(x).$$

- Die Komponenten des elektromagnetischen Feldstärketensors F folgen aus dem elektromagnetischen Viererpotential A gemäss $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$, $A^\mu(x) = (\Phi(x)/c, \vec{A}(x))$, $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$, wobei das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ gegeben sind durch $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{A}}$ und $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. In der Folge gelte $c = 1$.

Rechnen Sie als Wiederholungsübung explizit nach, dass

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix},$$

und geben Sie auch $F_{\mu\nu}$ und F^μ_ν durch dieselben Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes an. Drücken Sie schliesslich auch die Lorentz-invariante skalare Grösse $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ durch die $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Felder aus. Lassen sich aus den $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feldern noch weitere Lorentz-invariante (Feld-)Grössen konstruieren?

- Geben Sie einen stetigen Weg $\gamma : [0, \pi] \rightarrow SO(4, \mathbb{C})$ an, der die Eins $\mathbb{1}_4 = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ in der eigentlichen komplexen Lorentzgruppe $SO(4, \mathbb{C})$ mit der Raumzeitpiegelung $PT = -\mathbb{1}_4$ verbindet: $\gamma(0) = \mathbb{1}_4$, $\gamma(\pi) = -\mathbb{1}_4$, und $|\gamma| = \{\gamma(t) \mid t \in [0, \pi]\} \subset SO(4, \mathbb{C})$.

Existiert ein solcher Weg von $\mathbb{1}_4$ nach $-\mathbb{1}_4$ auch innerhalb der (reellen) eigentlichen Lorentzgruppe $SO(1, 3)$? Legen Sie weiter dar, weshalb die eigentliche komplexe Lorentzgruppe mit der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(4, \mathbb{C})$ identifiziert wird; weshalb notiert man nicht beispielsweise $SO(1, 3; \mathbb{C})$?

- Die komplexe spezielle orthogonale Gruppe in zwei Dimensionen ist gemäss

$$SO(2, \mathbb{C}) = \{C \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid C^T C = \mathbb{1}_2, \det C = 1\}$$

definiert.

Zeigen Sie, dass die $SO(2, \mathbb{C})$ und die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen ohne die Null $(\dot{\mathbb{C}}, \cdot)$ isomorph sind.

Abgabe der Übungen am 26. Oktober 2026 oder nach Absprache.