

Übungen: Mathematische Methoden der Teilchenphysik

Serie 1: Vorbereitende Fingerübungen

Einheiten, Grössen und die Lorentzinvarianz in der Teilchenphysik

1. Ergänzen Sie folgende Tabelle, in welcher die Werte diverser physikalischer Grössen im Einheitensystem der Teilchenphysik und dem SI-System gegeben sind. In der Teilchenphysik wird ein Einheitensystem verwendet, in welchem $\hbar = c = k_B = \epsilon_0 = 1$ gilt. Der Wert G_{TP} einer Grösse in der Teilchenphysik lässt sich in ihren Wert G_{SI} in SI-Einheiten umrechnen, indem man G_{TP} mit Potenzen der Konstanten $\hbar$, c , k_B und ϵ_0 im SI-System derart multipliziert, dass G_{SI} die korrekten Einheiten im SI-System erhält:

$$G_{SI} = G_{TP} \cdot \hbar_{SI}^\alpha \cdot c_{SI}^\beta \cdot k_{B,SI}^\gamma \cdot \epsilon_{0,SI}^\delta \quad \text{für geeignete } \alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

Grösse	Wert (Teilchenphysik)	Umrechnung (SI-System)	Wert (SI-System)
Energie	1eV	1eV := $1.602176634 \cdot 10^{-19}$ J	$1.602176634 \cdot 10^{-19}$ J
Länge	1MeV ⁻¹	1 MeV ⁻¹ · $\hbar c$	$1.973269804 \dots \cdot 10^{-13}$ m
Zeit	1meV ⁻¹		
Masse	1GeV		
Energiedichte	1GeV ⁴		
Temperatur	1eV		
El. Ladung	0.302822		
El. Feld	1keV ²		
El. Spannung	1keV	1keV / $\sqrt{\hbar c \epsilon_0}$	302.822V

2. Im Super Proton Synchrotron (SPS bzw. Sp̄pS) am CERN bei Genf wurden Protonen mit Antiprotonen kollinear zur Kollision gebracht. So konnten erstmals die schweren W[±]- und Z-Bosonen experimentell produziert werden. Die Energie der Protonen sowie der Antiprotonen betrug dabei 270GeV.

Welche Energie besaßen die Antiprotonen im Ruhesystem der Protonen unmittelbar vor der Kollision?

3. Es sei q ein zeitartiger Vierervektor im Vorwärtslichtkegel V^+ mit $0 < q^2 = q_\mu q^\mu = m^2$. Weiter sei auch $p = (p^0, \vec{p})$ ein zeitartiger Vierervektor im Minkowskiraum, es gelte $p^2 > m^2$ und $p^0 > 0$. Eine von p und q abhängige skalare Grösse t sei in einem Inertialsystem IS', in dem p die spezielle Darstellung $p' = (p'^0, \vec{0})$ und q eine Darstellung $q' = (q'^0, \vec{q}')$ besitzt, jeweils durch $t = |\vec{q}'| \sqrt{p'^0{}^2 - m^2}$ definiert.

Geben Sie einen Lorentzinvarianten Ausdruck für t an, welcher nur die Lorentzinvarianten Ausdrücke $p^2 = p_\mu p^\mu$, q^2 und $pq = p_\mu q^\mu$ enthält. Hinweis: Man betrachte die Grösse $(pq)^2 - p^2 q^2$.

4. Komplexe Lorentztransformation: Vier komplexen Parametern $z = (z^0, z^1, z^2, z^3) \in \mathbb{C}^4$ werde durch die lineare Bijektion

$$\mathbb{C}^4 \ni z \mapsto \underline{z} = \begin{pmatrix} z^0 + z^3 & z^1 - iz^2 \\ z^1 + iz^2 & z^0 - z^3 \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{C})$$

eine komplexe 2×2 -Matrix zugeordnet. Weiter seien A und B unimodulare Matrizen in $SL(2, \mathbb{C})$.

Zeigen Sie: Die Grösse

$$\kappa(z) = \underline{\kappa}(\underline{z}) = (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2$$

ist invariant unter der Transformation $\bar{\Lambda}_{A,B}$ gemäss

$$\underline{z} \rightarrow \underline{z}' = \bar{\Lambda}_{A,B}(\underline{z}) = A \underline{z} B^T = \begin{pmatrix} z'^0 + z'^3 & z'^1 - iz'^2 \\ z'^1 + iz'^2 & z'^0 - z'^3 \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt $(z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 = (z'^0)^2 - (z'^1)^2 - (z'^2)^2 - (z'^3)^2$.

5. Freiwillige Denkanregung: In der Elektrostatik ergibt sich das Coulomb-Potential ($r = ||\vec{x}||$)

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

einer Punktladung q als in der Unendlichkeit verschwindende Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{x}).$$

In der Newtonschen Gravitationstheorie lautet die Poisson-Gleichung für das Gravitationspotential $\tilde{\Phi}$ einer Punktmasse m analog

$$\Delta\tilde{\Phi}(\vec{x}) = 4\pi G m \delta^{(3)}(\vec{x}),$$

wobei die Gravitationskonstante durch $G = 6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\text{m}^3$ und die Gravitationsbeschleunigung als zum elektrischen Feld analoge Grösse durch $\vec{g}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\tilde{\Phi}(\vec{x})$ gegeben ist.

Leiten Sie einen Ausdruck für die Energiedichte des Gravitationsfeldes her und berechnen Sie diese Energiedichte an der Erdoberfläche.

Bekanntlich stossen sich elektrische Ladungen gleichen Vorzeichens ab, Massen ziehen sich an. Ist die Energiedichte des Newtonschen Gravitationsfeldes im Rahmen einer feldtheoretischen Betrachtung in der flachen Raumzeit positiv oder negativ?