Algebraische Strukturen und vollständige Vektorräume

Definition 1 *Sei G eine Menge mit einer zweistelligen inneren Vernüpfung $\circ : G \times G \to G$. $(G, \circ)$ heisst Gruppe, falls folgende Eigenschaften gelten:*

(M) $a, b \in G \Rightarrow \circ(a, b) =: a \circ b \in G$

(A) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in G$ *(Assoziativität)*

(N) $\exists_1 \, n \in G, n \circ a = a \circ n = a \quad \forall a \in G$ *(Existenz des eindeutigen neutralen Elements)*

(I) $a \in G \Rightarrow \exists_1 \, a^{-1} \in G,\ a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = n$ *(Inverses Element)*

Gilt für G die Eigenschaft (M), so heisst $(G, \circ)$ *Magma*. Beispiel: $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{N}, a \circ b = a^b)$.
Gelten in G die Eigenschaften (M) und (A), so ist $(G, \circ)$ eine *Halbgruppe*. Beispiel: $(\mathbb{N}, +)$.
Ist $(G, \circ)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element gemäss (N), nennt man $(G, \circ)$ ein *Monoid*. Beispiel: $(\mathbb{N}, \cdot)$.

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heisst *abelsch*, falls $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ gilt.

Definition 2 *Sei K eine Menge mit zwei zweistelligen Vernüpfungen $\oplus : K \times K \to K$ und $\odot : K \times K \to K$. $(K, \oplus, \odot)$ heisst Körper, falls gilt:*

(K1) $(K, \oplus)$ *ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element* 0.

(K2) $(K \backslash 0, \odot)$ *ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element* 1.

(K3) $\forall a, b, c \in K$ *gilt:* $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$, $(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$ *(Distributivgesetz).*

Notationsregel: Die zweite Verknüpfung $\odot$ wird vor vor der ersten Verknüpfung $\oplus$ ausgeführt ('Mal vor Plus').

Beispiele: Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, meromorphe Funktionen auf einem Gebiet in der komplexen Ebene mit der üblichen Addition und Multiplikation.

Definition 3 *Ein Vektorraum V_K über einem Körper $(K, \oplus, \odot)$ ist eine additive abelsche Gruppe $(V_K, +)$, auf der zusätzlich eine Multiplikation $\star :\ K \times V_K \to V_K$ mit einem Skalar aus K erklärt ist.*
Für alle Vektoren $u,\ v \in V_K$ und Skalare $\alpha,\ \beta \in K$ gelten die folgenden Definitions-Axiome (V1-4):

(V1) $\alpha \star (\beta \star v) = (\alpha \odot \beta) \star v$

(V2) $\alpha \star (u + v) = \alpha \star u + \alpha \star v$

(V3) $(\alpha \oplus \beta) \star v = \alpha \star v + \beta \star v$

(V4) $1 \star v = v$, *wobei* 1 *das Einselement des Körpers* K *darstellt.*

In der Quantenmechanik spielen reelle und komplexe Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) eine wichtige Rolle.

Beispiele: $\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}^n_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}$, $C^k(I) = \{f : I \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C} \,|\, fk$-mal stetig diff.-bar auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}\}$.

Bemerkung: Wird ein Vektorraum mit einer zusätzlichen vektorwertigen zweiten Verknüpfung ('Vektormultiplikation') zwischen je zwei Vektoren versehen, so spricht man oft von einer *Algebra*. Mengen mit Verknüpfungsstrukturen nennt man ganz allgemein *algebraische Strukturen*.

Beispiele: Dreidimensionaler euklidischer Vektorraum mit Vektoraddition und Vektorprodukt ('Kreuzprodukt'), Quaternionenalgebra $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, Oktonionen $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$, komplexe $n \times n$-Matrizen $Mat(n, \mathbb{C})$ mit entspr. Verknüpfungen.

Bemerkung: Ein Skalar ist also ein Element aus dem Grundkörper K eines Vektorraumes, ein Vektor ein Element aus V_K. Der Begriff *Skalar* wird in der Physik auch in einem anderen Sinne für eine vom Inertialsystem eines Beobachters unabhängige Grösse verwendet (z.B. die Ruhemasse eines Teilchens).

Definition 4 *n Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V_K$ heissen* linear unabhängig, *falls für $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset K$*

$$\lambda_1 \star v_1 + \ldots \lambda_n \star v_n = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

gilt. Dabei ist der Nullvektor $\mathbf{0}$ das neutrale Element in $(V_K, +)$.

Definition 5 *n linear unabhängige Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V_K$ sind eine Basis von V_K, falls sich jeder Vektor $v \in V_K$ als folgende Linearkombination darstellen lässt:*

$$v = \mu_1 \star v_1 + \ldots + \mu_n \star v_n \,, \quad \{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \subset K \,.$$

$n = \dim(V_K)$ ist die Dimension von V_K. Besteht der Vektorraum nur aus dem Element $\mathbf{0}$, so ist $\dim(\mathbf{0}) = 0$.

Beispiele: $\dim(\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}) = n$, $\dim(\mathbb{C}^n_{\mathbb{C}}) = n$, $\dim(\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}) = 2n$, $\dim(C^0([0,1])) = \infty$.

Definition 6 *Eine Norm ist eine Abbildung $||\cdot|| : V_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}^+_0$ von einem Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen in die nicht-negativen reellen Zahlen $\mathbb{R}^+_0$, welche für alle Vektoren $x,\, y \in V_{\mathbb{K}}$ und alle Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende Definitions-Axiome erfüllt:*

(N1) $\quad ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad$ *(Definitheit)*

(N2) $\quad ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||\,, \quad |\lambda| = \sqrt{\overline{\lambda} \cdot \lambda} \geq 0 \quad$ *(Homogenität)*

(N3) $\quad ||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad$ *(Δ-Ungleichung oder Subadditivität)*

Wie oben werden in der Folge die Symbole $+$ und $\cdot$ sowohl für skalare wie auch vektorielle Addition und Multiplikation verwendet. $\overline{\lambda} = \lambda^* = \lambda_1 - i \cdot \lambda_2$ bezeichnet den komplex konjugierten Wert von $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Ein Vektorraum mit Norm heisst *normierter Vektorraum*.

Definition 7 *Ein Banach-Raum $\mathcal{B}$ ist ein vollständiger normierter Vektorraum, d.h. in einem solchen Raum besitzt jede Cauchy-Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ (mit der Eigenschaft dass $\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, N(\epsilon)$ so, dass $||a_n - a_m|| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N(\epsilon)$) einen (eindeutigen) Grenzwert $a \in \mathcal{B}$; es gilt dann also für dieses a dass $\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, N(\epsilon)$ so, dass $||a_m - a|| < \epsilon$ für alle $m \geq N(\epsilon)$. Cauchy-Folgen werden auch als Fundamentalfolgen, konzentrierte Folgen oder in sich konvergente Folgen bezeichnet.*

Die erste systematische Untersuchung von Banachräumen findet sich in der Dissertation von Stefan Banach (1922).

Definition 8 *Es sei $V_{\mathbb{K}}$ ein Vektorraum über den reellen oder komplexen Zahlen. Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform ('eineinhalb-linear'), d.h. eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_{\mathbb{K}} \times V_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{K}$, welche für alle $x,\, y,\, z \in V_{\mathbb{K}}$ und $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ folgende Forderungen erfüllt:*

(I1) $\quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad$ *(positive Definitheit)*

(I2) $\quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad$ *(Definitheit)*

(I3) $\quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad$ *(Symmetrie, Hermitezität)*

(I4) $\quad \langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad$ *(Linearität)*

Aus diesen Axiomen folgt sofort die Antilinearität im ersten Argument $\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$.
Mathematiker fordern in *(I4)* die Linearität oft im linken statt im rechten Argument.

Definition 9 *Ein Vektorraum mit innerem Produkt $(V_{\mathbb{K}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heisst Prä-Hilbertraum. Im reellen Fall spricht man auch von einem* euklidischen Raum *$V_{\mathbb{R}}$, im komplexen Fall von einem* unitären Raum *$V_{\mathbb{C}}$. Diese Räume sind mit der induzierten Norm $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ auch normierte Vektorräume.*

Definition 10 *Ein Hilbertraum ist ein bezüglich der induzierten Norm* vollständiger *euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt. Oft wird nur der komplexe (unitäre) Fall betrachtet. Ein unvollständiger Prähilbertraum lässt sicht immer eindeutig (bis aus Isomorphie) zu einem Hilbertraum erweitern, indem fehlende Grenzwerte in Form von Äquivalenzklassen entsprechender Cauchy-Folgen als abstrakte Elemente zum Prähilbertraum hinzugefügt werden.*