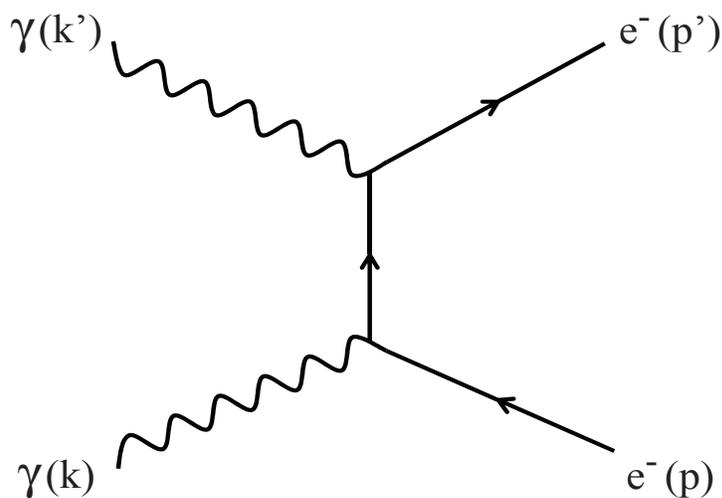


Notizen zur Vorlesung Mathematische Methoden der Teilchenphysik

Andreas Aste
Departement Physik der Universität Basel

Herbstsemester 2025

$\mathcal{L}_+^\uparrow = SO^+(1, 3)$	$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(x)$
$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$	$\square\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0$
$\psi'_L(x') = \epsilon A^* \epsilon^{-1} \psi_L(\Lambda^{-1}x')$	$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 A^\nu = 0$
$\underline{\partial} = \sigma_\mu \partial^\mu = \begin{pmatrix} \partial^0 + \partial^3 & \partial^1 - i\partial^2 \\ \partial^1 + i\partial^2 & \partial^0 - \partial^3 \end{pmatrix}$	$A^\mu(x) = \int_0^1 d\lambda \lambda F^{\mu\nu}(\lambda x) x_\nu$
$i\sigma_\mu \partial^\mu \psi_L(x) - \eta_L m_L (i\sigma_2) \psi_L(x)^* = 0$	
$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\Psi(x) = 0$	$T^{\mu\nu}(x) = \varphi(x)g^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}(x) + H^{\mu\nu}(x)$



Algebraische Strukturen und vollständige Vektorräume

Definition 1 Sei G eine Menge mit einer zweistelligen inneren Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$. (G, \circ) heisst Gruppe, falls folgende Eigenschaften gelten:

- (M) $a, b \in G \Rightarrow \circ(a, b) =: a \circ b \in G$
- (A) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in G$ (Assoziativität)
- (N) $\exists_1 n \in G, n \circ a = a \circ n = a \quad \forall a \in G$ (Existenz des eindeutigen neutralen Elements)
- (I) $a \in G \Rightarrow \exists_1 a^{-1} \in G, a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = n$ (Inverses Element)

Gilt für G die Eigenschaft (M), so heisst (G, \circ) Magma. Beispiele: $(\mathbb{Z}, -)$, $(\mathbb{N}, a \circ b = a^b)$.

Gelten in G die Eigenschaften (M) und (A), so ist (G, \circ) eine Halbgruppe. Beispiel: $(\mathbb{N}, +)$.

Ist (G, \circ) eine Halbgruppe mit neutralem Element gemäss (N), nennt man (G, \circ) ein Monoid. Beispiel: (\mathbb{N}, \cdot) .

Eine Gruppe (G, \circ) heisst abelsch, falls $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ gilt.

Definition 2 Sei K eine Menge mit zwei zweistelligen Verknüpfungen $\oplus : K \times K \rightarrow K$ und $\odot : K \times K \rightarrow K$. (K, \oplus, \odot) heisst Körper, falls gilt:

- (K1) (K, \oplus) ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
- (K2) $(K \setminus \{0\}, \odot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.
- (K3) $\forall a, b, c \in K$ gilt: $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$, $(a \oplus b) \odot c = a \odot c \oplus b \odot c$ (Distributivgesetz).

Notationsregel: Die zweite Verknüpfung \odot wird vor der ersten Verknüpfung \oplus ausgeführt ('Mal vor Plus').

Beispiele: Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, meromorphe Funktionen auf einem Gebiet in der komplexen Ebene mit der üblichen Addition und Multiplikation.

Definition 3 Ein Vektorraum V_K über einem Körper (K, \oplus, \odot) ist eine additive abelsche Gruppe $(V_K, +)$, auf der zusätzlich eine Multiplikation $\star : K \times V_K \rightarrow V_K$ mit einem Skalar aus K erklärt ist.

Für alle Vektoren $u, v \in V_K$ und Skalare $\alpha, \beta \in K$ gelten die folgenden Definitions-Axiome (V1-4):

- (V1) $\alpha \star (\beta \star v) = (\alpha \odot \beta) \star v$
- (V2) $\alpha \star (u + v) = \alpha \star u + \alpha \star v$
- (V3) $(\alpha \oplus \beta) \star v = \alpha \star v + \beta \star v$
- (V4) $1 \star v = v$, wobei 1 das Einselement des Körpers K darstellt.

In der Quantenmechanik spielen reelle und komplexe Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) eine wichtige Rolle.

Beispiele: $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^n, C^k(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} \mid f \text{ k-mal stetig diff.-bar auf dem Intervall } I \subseteq \mathbb{R}\}$.

Bemerkung: Wird ein Vektorraum mit einer zusätzlichen vektorwertigen zweiten Verknüpfung ('Vektormultiplikation') zwischen je zwei Vektoren versehen, so spricht man oft von einer Algebra. Mengen mit Verknüpfungsstrukturen nennt man ganz allgemein algebraische Strukturen.

Beispiele: Dreidimensionaler euklidischer Vektorraum mit Vektoraddition und Vektorprodukt ('Kreuzprodukt'), Quaternionenalgebra $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, Oktonionen $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$, komplexe $n \times n$ -Matrizen $Mat(n, \mathbb{C})$ mit entspr. Verknüpfungen.

Bemerkung: Ein Skalar ist also ein Element aus dem Grundkörper K eines Vektorraumes, ein Vektor ein Element aus V_K . Der Begriff Skalar wird in der Physik auch in einem anderen Sinne für eine vom Inertialsystem eines Beobachters unabhängige Grösse verwendet (z.B. die Ruhemasse eines Teilchens).

Definition 4 n Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V_K$ heissen linear unabhängig, falls für $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset K$

$$\lambda_1 \star v_1 + \dots + \lambda_n \star v_n = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

gilt. Dabei ist der Nullvektor $\mathbf{0}$ das neutrale Element in $(V_K, +)$.

Definition 5 n linear unabhängige Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V_K$ sind eine Basis von V_K , falls sich jeder Vektor $v \in V_K$ als folgende Linearkombination darstellen lässt:

$$v = \mu_1 \star v_1 + \dots + \mu_n \star v_n, \quad \{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset K.$$

$n = \dim(V_K)$ ist die Dimension von V_K . Besteht der Vektorraum nur aus dem Element $\mathbf{0}$, so ist $\dim(\mathbf{0}) = 0$.

Beispiele: $\dim(\mathbb{R}^n_{\mathbb{R}}) = n$, $\dim(\mathbb{C}^n_{\mathbb{C}}) = n$, $\dim(\mathbb{C}^n_{\mathbb{R}}) = 2n$, $\dim(C^0([0, 1])) = \infty$ in gewissem Sinne.

Definition 6 Eine Norm ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V_K \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ von einem Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} der reellen oder komplexen Zahlen in die nicht-negativen reellen Zahlen \mathbb{R}_0^+ , welche für alle Vektoren $x, y \in V_K$ und alle Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ folgende Definitions-Axiome erfüllt:

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{Definitheit})$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad |\lambda| = \sqrt{\bar{\lambda} \cdot \lambda} \geq 0 \quad (\text{Homogenität})$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\Delta\text{-Ungleichung oder Subadditivität})$$

Wie oben werden in der Folge die Symbole $+$ und \cdot sowohl für skalare wie auch vektorielle Addition und Multiplikation verwendet. $\bar{\lambda} = \lambda^* = \lambda_1 - i \cdot \lambda_2$ bezeichnet den komplex konjugierten Wert von $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Ein Vektorraum mit Norm heisst *normierter Vektorraum*.

Definition 7 Ein Banach-Raum \mathcal{B} ist ein vollständiger normierter Vektorraum, d.h. in einem solchen Raum besitzt jede Cauchy-Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ (mit der Eigenschaft dass $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon)$ so, dass $\|a_n - a_m\| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N(\epsilon)$) einen (eindeutigen) Grenzwert $a \in \mathcal{B}$; es gilt dann also für dieses a dass $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon)$ so, dass $\|a_m - a\| < \epsilon$ für alle $m \geq N(\epsilon)$. Cauchy-Folgen werden auch als *Fundamentalfolgen*, *konzentrierte Folgen* oder *in sich konvergente Folgen* bezeichnet.

Die erste systematische Untersuchung von Banachräumen findet sich in der Dissertation von Stefan Banach (1922).

Definition 8 Es sei V_K ein Vektorraum über den reellen oder komplexen Zahlen. Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform ('eineinhalb-linear'), d.h. eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_K \times V_K \rightarrow \mathbb{K}$, welche für alle $x, y, z \in V_K$ und $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} folgende Forderungen erfüllt:

$$(I1) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad (\text{positive Definitheit})$$

$$(I2) \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{Definitheit})$$

$$(I3) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (\text{Symmetrie, Hermitezität})$$

$$(I4) \quad \langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad (\text{Linearität})$$

Aus diesen Axiomen folgt sofort die Antilinearität im ersten Argument $\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$.

Mathematiker fordern in (I4) die Linearität oft im linken statt im rechten Argument.

Definition 9 Ein Vektorraum mit innerem Produkt $(V_K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heisst Prä-Hilbertraum. Im reellen Fall spricht man auch von einem euklidischen Raum $V_{\mathbb{R}}$, im komplexen Fall von einem unitären Raum $V_{\mathbb{C}}$. Diese Räume sind mit der induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$ auch normierte Vektorräume.

Definition 10 Ein Hilbertraum ist ein bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständiger euklidischer oder unitärer Vektorraum. Oft wird in der Physik nur der komplexe (unitäre) Fall betrachtet. Ein unvollständiger Prähilbertraum lässt sich immer eindeutig (bis auf Isomorphie) zu einem Hilbertraum erweitern, indem fehlende Grenzwerte in Form von Äquivalenzklassen entsprechender Cauchy-Folgen als abstrakte Elemente zum Prähilbertraum hinzugefügt werden.

Quanten, Skalen, Konstanten und Fluktuationen

“Es ist falsch zu glauben, daß es Aufgabe der Physik sei, herauszufinden, wie die Natur ist. Die Physik beschäftigt sich mit dem, was wir über die Natur sagen können.”

Niels Bohr (1885-1962).

Unschärfe

Aus den Postulaten der Quantenmechanik leitet sich ab, dass bei der simultanen Messung zweier durch selbstadjungierte lineare Operatoren \hat{A} und \hat{B} repräsentierten Observablen an einem durch einen Zustandsvektor ψ (in einem das quantenmechanische System repräsentierenden separablen unitären Hilbertraum \mathcal{H}) repräsentierten Zustand für die Standardabweichungen $\Delta\hat{A}$ und $\Delta\hat{B}$ der wiederholten Messungen die *Unschärferelation* (UR)

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]\psi\rangle| \quad (1)$$

gilt. Die Standardabweichung $\Delta\hat{A} > 0$ beschreibt eine mittlere Abweichung der Messwerte vom Erwartungswert $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}\psi\rangle$ und ist durch die Varianz $\Delta\hat{A}^2 = \langle\psi|(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\psi\rangle$ gegeben. In ihrer ursprünglichen und prominentesten Form wurde die Unschärferelation für die Unbestimmtheit des Aufenthaltsortes und des Impulses eines Teilchens (in einer räumlichen Dimension) formuliert¹:

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} \geq \hbar/2. \quad (2)$$

Offensichtlich folgt diese Unbestimmtheit aus der in der Heisenberg-Algebra geforderten Kommutatorbeziehung $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ für den Ortsoperator \hat{q} und den Impulsoperator \hat{p} . Die Relation $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ kann übrigens nicht in endlichdimensionalen unitären Räumen erfüllt werden, da im n -dimensionalen Raum für die Spur (englisch: *trace*) von $[\hat{q}, \hat{p}]$ sofort der Widerspruch $\text{tr}[q, p] = \text{tr}(qp) - \text{tr}(pq) = 0 \neq i\hbar \text{tr id} = i\hbar n$ folgen würde.

Oft wird in der Literatur eine analoge Energie-Zeit-Unschärferelation der Form $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$ konstruiert, welche für gewisse Betrachtungen durchaus praktisch, aber mit Vorsicht zu geniessen ist. So wird auch argumentiert, dass im physikalischen Raum für kurze Zeiten Δt der Energieerhaltungssatz um Energiebeträge der Größenordnung $\Delta E \simeq \hbar/\Delta t$ verletzt werden könne, was zur spontanen Bildung virtueller Teilchen als 'Vakuumfluktuationen' führe, welche zudem innerhalb der Zeit Δt über eine durch die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458\text{m/s}$ assoziierte Strecke der Größenordnung $\Delta x \simeq c\Delta t$ propagieren können. Dieses Bild ist zu relativieren; tatsächlich gilt in der Quantenfeldtheorie, welche Teilchenerzeugungs- und Teilchenvernichtungsvorgänge beschreibt, immer *strikt* der Energieerhaltungssatz². Es ist aber so, dass bei der Beobachtung eines kleinen Raumvolumens oder einem kurz andauernden Messvorgang Effekte eine Rolle spielen können, die sich als 'Teilchen-Fluktuationen' interpretieren lassen.

Der Grund für solche Effekte liegt in der Tatsache begründet, dass gewisse Messgrößen in der Quantenmechanik nicht mit dem Hamiltonoperator des untersuchten Systems kommutieren; entsprechend treten Energie-Unschärfen durch den Beobachtungsprozess auf. So bewegt sich das Elektron im Grundzustand eines ruhenden Wasserstoffatoms nicht; der Zustand des Elektrons wird durch seine Wellenfunktion beschrieben, welche die gesamte uns zugängliche Information über den Elektronenzustand repräsentiert. Will man aber den Ort oder die Geschwindigkeit des Elektrons bestimmen, so wird man bei wiederholter Messung verschiedene, also fluktuierende Werte beobachten, was auf den Messvorgang am zeitlich stationären System zurückzuführen ist.

¹... mit dem Planckschen Wirkungsquantum $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34}\text{Js} = 2\pi\hbar = 6.2831853071\dots \cdot 1.0545718176\dots \cdot 10^{-34}\text{Js}$. \hbar wird als *reduziertes* Plancksches Wirkungsquantum bezeichnet.

²Allerdings ist das Konzept der Energieerhaltung auf gekrümmten Raumzeiten in der allgemeinen Relativitätstheorie problematisch.

Längenskalen

In den gängigen kosmologischen Modellen unseres Universums wird davon ausgegangen, dass vor 13.8 Milliarden Jahren ein als 'Urknall' bezeichneter Schöpfungsprozess stattfand. Zwar legt Licht im flachen Raum in 13.8 Milliarden Jahren eine Strecke von 13.8 Milliarden Lichtjahren zurück, doch wegen der Expansion des Universums dürften sich unterdessen die entferntesten Objekte, die sich prinzipiell noch von der Erde aus in einer frühen Phase ihrer Entstehung nach dem Urknall beobachten liessen, weiter als 13.8 Milliarden Lichtjahre von uns entfernt befinden. Man setzt den Radius des beobachtbaren Universums im Rahmen des Standard-Urknallmodells zu etwa 46.6 Milliarden Lichtjahren oder $4.41 \cdot 10^{26}$ m an.

Es sind aber auch die Naturgesetze im Kleinsten, welche das Verhalten des Universums im Grossen bestimmen. So erweisen sich bei genauerem Hinsehen viele Quantitäten in der Natur als quantisiert, und im Falle der elektrischen Ladung stellt sich heraus, dass diese strikt portioniert auftritt. Diese Tatsache harret bislang einer fundierten Erklärung, auch wenn gewisse Konsistenzbetrachtungen im Rahmen erweiterter quantenfeldtheoretischer Theorien der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen Hinweise auf eine mögliche Lösung des Problems liefern. So konnten bislang nur Teilchen beobachtet werden, deren elektrische Ladung ein ganzzahliges Vielfaches (eines Drittels³) der Elementarladung $e_0 = 1.602176634$ As betrug. Fällt ein Teilchen durch eine elektrische Potentialdifferenz von einem Volt, so gelangt man auch schon zu einer für die Atom-, Kern-, Astro- und Teilchen-Physik praktischen Energieeinheit, dem Elektron(en)volt (eV) mit $1\text{eV} := 1.602176634 \cdot 10^{-19}$ J. Auch Energien sind bisweilen 'gequantelt', aber nicht zwingend so gleichmässig wie die elektrische Ladung.

Die uns bekannten Lebensformen halten sich auf einer logarithmischen Skala betrachtet im Mittelfeld zwischen den grössten und den kleinsten uns durch Beobachtung zugänglichen Objekte auf. Wo schliesslich die Grenze zwischen klassischer Physik und Quantenmechanik anzusetzen ist, ist kaum klar zu beantworten, zumal der Begriff der klassischen Physik heutzutage für eine Theorie steht, welche sich als Grenzfall aus der fundamentalen Naturbeschreibung durch die Quantenmechanik ergibt. Makroskopische Quantenphänomene wie die Levitation von Supraleitern über Magneten (Meissner-Ochsenfeld-Effekt) oder die Suprafluidität von Heliumisotopen sind wohlbekannt. Da der Mensch selbst aus Molekülen besteht, deren typische thermische Energie sich aus der Boltzmann-Konstante $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ (exakt!) und der Körpertemperatur $T \simeq 310\text{K}$ zu etwa $k_B T \simeq 0.027\text{eV}$ errechnet, gehen aber Energiequanten in diesem Energiebereich im thermischen Rauschen eines menschlichen Körpers als 'Detektor' unter und sind daher *einzel*n nicht wahrnehmbar.

Betrachtet man Quanten etwas höherer Energie - beispielsweise optische Photonen mit Energien weniger eV - so gelangt man in den Bereich der Auflösung konventioneller Lichtmikroskope, welche mit der (reduzierten) Wellenlänge λ ($\lambda = \lambda/(2\pi)$) oder der (Kreis-)Frequenz ν ($\omega = 2\pi \cdot \nu$) des Lichts als elektromagnetische Welle und der Energie $E_\gamma = h\nu = \hbar\omega = hc/\lambda = \hbar c/\lambda$ der mit der Welle assoziierten Photonen (γ -Quanten) sowie deren Impuls $p_\gamma = \hbar/\lambda = \hbar/\lambda = E_\gamma/c$ verknüpft ist. Mit $p_\gamma \lambda = \hbar$ beobachtet man mit der Impuls-Wellenlängen-Beziehung des Lichts eine an die Orts-Impuls-Unschärferelation erinnernde Beziehung.

Das durchschnittlich normal sehende Auge reagiert bei Tageslicht am sensibelsten auf Photonen einer Wellenlänge von $555\text{nm} = 5.55 \cdot 10^{-7}\text{m}$. Daraus berechnet sich eine Frequenz von $\nu \simeq 540\text{THz} = 5.4 \cdot 10^{14}\text{s}^{-1}$ und eine Photonenenergie von $E_\gamma \simeq 2.23\text{eV} \simeq 3.58 \cdot 10^{-19}\text{J}$. Solche Energien liegen im Bereich molekularer Bindungsenergien; die Wellenlänge übertrifft die Ausdehnung von Atomen aber noch um etwa 3 Zehnerpotenzen.

Teilchenphysiker[innen] kennen ja mit Vorteil den Wert des folgenden Produkts zweier Naturkonstanten⁴

$$\hbar c = 197.33\text{MeV} \cdot \text{fm} \simeq 0.2\text{GeV} \cdot \text{fm}, \quad (3)$$

³Man vergesse nicht die Quarks. Die Ladung des Up-Quarks beträgt $\frac{2}{3}e_0$, die des Down-Quarks $-e_0/3$.

⁴1fm = 10^{-15}m = 1 Femtometer = 1 Fermi. Aus dem Dänischen 'femten' = 'fünfzehn' bzw. nach Enrico Fermi (1901-1954), Nobelpreis für Physik 1938.

welcher sofort eine Abschätzung der in der Kern- und Teilchen-Physik auftretenden typischen Längenskalen bei gegebener Energieskala und umgekehrt zulässt. So beträgt die räumliche Ausdehnung eines Protons etwa 1fm, während die Energien der sich im Proton aufhaltenden Valenz-Quarks im Bereich von Bruchteilen eines GeV liegen .

Dringt man also weiter vor in die mikroskopische, durch Quanteneffekte dominierte Welt, so ist zudem eine kurze Diskussion der Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq 0.0072973525664(17) = \frac{1}{137.035999139(31)} \quad (4)$$

(mit der elektrischen Feldkonstante $\epsilon_0 = 8.8541878128(13)\text{As/(Vm)}$ und der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458\text{m/s}$) durchaus interessant. Das Besondere an α ist die Tatsache, dass α eine *Zahl* ist; der Wert der Feinstrukturkonstante ist unabhängig vom verwendeten Einheitensystem. In diesem Sinne ist α fundamental für die Physik in unserem Universum, und α hat in den vergangenen Jahrmilliarden keine bislang nachweisbare Änderung erfahren.

Damit ergibt sich folgende Liste wichtiger Längen- und Energie-Skalen in der Quantenmechanik, wobei die untenstehende hierarchische Gliederung zunächst durch die Feinstrukturkonstante α vorgegeben ist:

- Bohrscher Radius

$$r_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e_0^2} = 5.2917721067(12) \cdot 10^{-11}\text{m}. \quad (5)$$

Der Bohrradius ist ein Mass für die Ausdehnung des Wasserstoffatoms im Grundzustand. Die Bindungsenergie wie auch die kinetische Energie des Elektrons der Masse $m_e = 9.10938356(11) \cdot 10^{-31}\text{kg} \simeq 511\text{keV}/c^2$ in diesem Zustand betragen rund 13.6eV; das Elektron bewegt sich in einer *klassischen* Betrachtung (Bohrmodell) mit der Geschwindigkeit $v_{e^-} \simeq \alpha c \simeq c/137$.

- Reduzierte Comptonwellenlänge des Elektrons

$$\lambda_c = \alpha r_B = \frac{\lambda_c}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.86159267533(18)\text{m}. \quad (6)$$

Auf dieser mit der Ruheenergie des Elektrons von 511keV assoziierten Längenskala treten in der λ -Umgebung eines Elektrons geringfügige Abweichungen vom $1/r^2$ -Verhalten des Coulombfeldes auf, die in einem klassischen Bild durch die Bildung virtueller Elektron-Positron-Paare erklärt werden ('Vakuumpolarisation').

- Klassischer Elektronenradius

$$r_e = \alpha \lambda_c = \alpha^2 r_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{m_e c^2} = 2.8179403227(19) \cdot 10^{-15}\text{m}. \quad (7)$$

Stellt man sich ein Elektron als eine Ladungswolke vor und berechnet im Rahmen dieser naiven Modellvorstellung die ungefähre räumliche Ausdehnung dieser Wolke, bei der die potenzielle elektrostatische Energie der Ladungsverteilung der Ruheenergie $m_e c^2$ des Elektrons entspricht, so gelangt man schliesslich zu Werten in der Grössenordnung des klassischen Elektronenradius.

- Elektroschwache Längenskala

$$l_W \simeq \lambda_{c,Z} = \frac{\hbar}{m_Z c} = 2.163967(50) \cdot 10^{-18}\text{m}. \quad (8)$$

Die reduzierte Comptonwellenlänge $\lambda_{c,Z}$ des Z -Bosons (oder der etwas leichteren W^\pm -Bosonen) als Vermittler der schwachen Wechselwirkung ist zugleich ein Mass für die Reichweite dieser Kraft. Zerfällt beim β^- -Zerfall des Neutrons ein u -Quark in ein d -Quark, so geschieht dies in einer l_W -Umgebung der betreffenden Quarks. Das elementare Z -Boson ist mit einer Ruhemasse von $m_Z = 91.1876(21)\text{GeV}/c^2$ etwa 100mal schwerer als das Proton ($m_P = 938.2720813(58)\text{MeV}/c^2 = 1836.15267389(17)m_e$).

- Planck-Länge

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616229(38) \cdot 10^{-35} \text{ m.} \quad (9)$$

Auf dieser Längenskala verliert die Raumzeit wahrscheinlich alle klassischen Eigenschaften und muss in einem quantenmechanischen Rahmen untersucht werden. Stellt man sich vor, dass 'Vakuum-Massenfluktuationen' im Allerkleinsten so gross werden, dass sie gar der Bildung virtueller schwarzer Löcher Vorschub leisten, so lässt sich aus dem berühmten Resultat der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) für den Schwarzschildradius r_S eines nicht rotierenden, ungeladenen schwarzen Loches der Masse M_{BH}

$$r_S = \frac{2G}{c^2} M_{BH} \quad (10)$$

mit einer Ortsunschärfe $\Delta x \simeq l_P \simeq r_S$ und Massenunschärfe $\Delta m \simeq m_P \simeq M_{BH}$ auf Planck-Skala mit

$$\Delta x \stackrel{UR}{\simeq} \frac{\hbar}{2m_P c} \quad \text{und} \quad \Delta x \stackrel{ART}{\simeq} \frac{2G}{c^2} m_P \quad \text{sofort} \quad \Delta x^2 \simeq \frac{G\hbar}{c^3} = l_P^2 \quad (11)$$

folgern. Im Kleinsten entpuppt sich die Raumzeit wohl als 'Quantenschaum' und verliert ihre in der Elementargeometrie suggerierten Eigenschaften. Natürlich ist $G = 6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^3$ die Gravitationskonstante.

Fundamentale Konstanten

Man mag sich fragen, ob 'Naturkonstanten' wie die Plancksche Konstante oder die Lichtgeschwindigkeit *zeitabhängig* sind; in einem verallgemeinerten Rahmen könnte die Plancksche Konstante gar als Raumzeit-Funktion $h(t, \vec{x})$ angesetzt werden.

Da aber Messungen auf einem Vergleichsprozess beruhen, macht es tatsächlich wenig Sinn, bei einer solchen Fragestellung einheitenbehaftete Grössen vorbehaltlos zu diskutieren. So wird beispielsweise davon ausgegangen, dass sich das Universum in den vergangenen Jahrmilliarden ausgedehnt hat; diese Aussage ist aber nur dann sinnvoll, wenn klar ist, dass die mit ihren verschiedenen Eigenschaften als Massstäbe dienenden Elementarteilchen als unveränderlich vorausgesetzt werden können.

Daher sind *dimensionslose* (einheitenunabhängige) Grössen besser geeignet, um als 'fundamentale Konstanten' im Rahmen theoretischer Betrachtungen untersucht zu werden. Ob sich der Wert der Feinstrukturkonstante α oder die Massenverhältnisse diverser Elementarteilchen ($\mu = m_P/m_e \simeq 6\pi^5$) als eher zufällig oder als ähnlich fundamental wie die Kreiszahl $\pi = 3.14159265\dots$ erweisen werden, ist eine interessante unbeantwortete Frage. Experimentelle Messungen beschränken die Zeitabhängigkeit der oben erwähnten Verhältnisse auf

$$\frac{|\dot{\alpha}|}{\alpha} < 10^{-17} a^{-1}, \quad \frac{|\dot{\mu}|}{\mu} < 10^{-16} a^{-1}. \quad (12)$$

Natürlich definiert jedes Verhältnis der Ruhemassen zweier (Elementar-)Teilchen eine fundamentale dimensionslose Grösse. Eine weitere dimensionslose Grösse stellt das Verhältnis R der elektrostatischen und gravitostatischen Anziehungskraft zwischen einem Elektron-Positron-Paar

$$F_{el}^{e^\pm} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad F_{grav}^{e^\pm} = G \frac{m_e^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad R = F_{el}^{e^\pm} / F_{grav}^{e^\pm} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e^2} \simeq 4.1656 \cdot 10^{42} \quad (13)$$

dar.

Weitere dimensionslose Parameter tauchen im Standardmodell der Teilchenphysik in Form der starken und elektroschwachen Kopplungskonstanten und in der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix und der Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix auf.

Einheiten in der Teilchenphysik

SI-Einheiten

Physikalische Grössen werden in der Experimentalphysik gemessen und in der theoretischen Physik berechnet. Der Wert G einer skalaren physikalischen Grösse \mathcal{G} als eine an einem Objekt der Physik quantitativ bestimmbare Eigenschaft eines Vorgangs oder Zustands wird üblicherweise als Produkt aus einem Zahlenwert $\{G\}$ und einer Masseinheit $[G]$ angegeben:

$$G = \{G\}[G]. \quad (14)$$

Der Begriff der *skalaren* Grösse wird hier natürlich im Sinne einer durch einen einzelnen Zahlenwert und die Masseinheit charakterisierbaren Grösse verwendet und hat hier keinen expliziten gruppentheoretischen Hintergrund. G kann also auch eine Komponente einer tensoriellen Grösse sein. Üblicherweise wird die Einheit $[G]$ durch ein Einheitenzeichen abgekürzt notiert (Meter \rightarrow m), und Einheiten können durch Potenzierung und Produktbildung zu neuen Einheiten abgeleitet oder durch Präfixe (welche oft ganzzahligen Potenzen von 10^3 entsprechen) so reskaliert werden, dass der Zahlenwert $\{G\}$ in einem wünschenswerten numerischen Bereich liegt (m \rightarrow km = 10^3 m).

Nach der Internationalen Organisation für Normung (ISO) sind Grössensymbole (Formelzeichen) in kursiver Schrift zu schreiben, Einheitenzeichen in aufrechter Schrift. Zwischen Zahlenwert und Einheit steht kein Multiplikationszeichen.

Im heutzutage am weitesten verbreiteten *Internationalen Einheitensystem* oder *SI-System* (französisch *Système international d'unités*) wurden nach praktischen Gesichtspunkten 7 Basiseinheiten zur Angabe physikalischer Grössen definiert. Die sieben Basiseinheiten heissen *Meter* (abgekürzt m), *Sekunde* (s), *Kilogramm* (kg), *Ampere* (A), *Kelvin* (K), *Mol* (mol) und *Candela* (cd). Dabei ist zu bemerken, dass die Einheit Ampere im Gegensatz zu ihrem Namensgeber André-Marie Ampère ohne accent grave geschrieben wird. Die Einheit Candela ist mit dem optischen Sinneseindruck einer Leuchte auf Auge und Gehirn eines Menschen verknüpft und soll wegen ihrer geringen Relevanz für die Teilchenphysik hier nicht weiter diskutiert werden.

Die historischen Hintergründe der heute gebräuchlichen SI-Einheiten stellen ein umfangreiches und interessantes Thema dar - so war die Sekunde bis in die 1950er Jahre als der 86400ste Teil des mittleren Sonnentages definiert, der Meter sollte den zehnmillionsten Teil des Erdquadranten des vom Nordpol ausgehenden und Paris berührenden Meridians betragen und wurde entsprechend einst durch zwei Markierungen auf Metallstäben, den *Urmetern*, definiert. Zudem ist ein Sekundenpendel recht präzise einen Meter lang. Doch auch diese Betrachtungen würden hier zu weit führen.

Seit dem 20. Mai 2019 sind sämtliche SI-Einheiten mit Hilfe physikalischer Konstanten definiert und somit nicht länger von menschengemachten Artefakten wie beispielsweise dem seit 1889 in Sèvres bei Paris aufbewahrten *Urkilogramm* oder einem Urmeter abhängig. Aktuell gilt:

Die Sekunde ist seit 1967 als das 9192631770fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung definiert, d.h. die entsprechende Frequenz beträgt genau 9192631770s^{-1} . Diese Definition der Sekunde bezieht sich auf Cäsiumatome im Ruhezustand, bei einer Temperatur von 0K. Die Übergangslinienbreite ist sehr gering; zudem ist die Tatsache von Vorteil, dass ^{133}Cs das einzige stabile Isotop des Cäsiums darstellt, wodurch messtechnisch nachteilige Isotopeneffekte ausgeschlossen werden können.

Durch die Definition der Sekunde wird mit der Festlegung der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit im Jahre 1983 auf den exakten Wert $c = 299792458\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ der Meter als die Strecke definiert, welche das Licht in einer 299792458stel Sekunde zurücklegt. Innerhalb der heutigen experimentellen Messgenauigkeit kann für die

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit keine Dispersion, d.h. eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Frequenz einer elektromagnetischen ebenen Welle oder der Energie eines Photons, festgestellt werden.

Seit 2019 ist damit auch das Kilogramm als schwere und träge Masseneinheit durch die Festlegung der Planckschen Konstante auf $h = 6.62607015 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ festgelegt. Dabei gilt die Masseneinheit Kilogramm (kg) trotz des Präfixes k = 1000, welches das Kilogramm die tausendfache Masse des Gramms (g) notiert, als SI-Basiseinheit. Aus den SI-Basiseinheiten s, m und kg bildet man die abgeleitete SI-Energieeinheit *Joule* ($1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$).

Nach wie vor gilt das Ampere als SI-Basiseinheit und nicht die abgeleitete SI-Ladungseinheit Coulomb (C), auch wenn das Ampere seit 2019 durch die Festlegung der Elementarladung (bzw. der Protonladung) auf den exakten Wert $e_0 = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ mit $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$ erklärt ist.

Die Temperatureinheit Kelvin (bzw. Grad Celsius) wird neu durch die Festlegung der Boltzmann-Konstante auf den exakten Wert $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ definiert. Früher war das Kelvin als der 273.16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers definiert, wobei bereits die Definition des Wassers als Isotopengemisch eine gewisse Herausforderung darstellt. Bekanntlich ist die mittlere Energie der voll-elastischen punktförmigen Teilchen eines idealen Gases der Temperatur T gegeben durch $\bar{E} = 3k_B T/2$, der Energiebegriff ist also unmittelbar mit dem Temperaturbegriff verknüpft.

Das Mol als SI-Basiseinheit der Stoffmenge bezeichnete ursprünglich die Zahl der Atome in einer Probe aus 12g reinem ^{12}C . Seit 2019 enthält 1mol eines Stoffes genau $6.02214076 \cdot 10^{23}$ Teilchen, also rund 600 Trilliarden. In gewissem Sinne ist das Mol der Name einer grossen Zahl, die dem Zählen der Teilchen in einer makroskopischen Stoffmenge dienlich ist. Es ist klar, dass auf diese SI-Basiseinheit ohne grössere Not verzichtet werden könnte.

Einheiten in der Teilchenphysik

Im SI-Einheitensystem gilt also für das Beispiel des reduzierten Planckschen Wirkungsquantums \hbar exakt

$$\hbar = \{\hbar\}[\hbar], \quad \{\hbar\} = 6.62607015 \cdot 10^{-34} / (2 \cdot \pi) = 1.0545718176 \dots \cdot 10^{-34}, \quad [\hbar] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = \text{Js}, \quad (15)$$

wobei die Auslassung eines Punktes in der Einheit $\text{Js} = \text{J} \cdot \text{s}$ keine Notationsmissverständnisse verursachen kann.

In der Teilchenphysik wird ein *natürliches* Einheitensystem verwendet, in welchem

$$\hbar = c = k_B = \epsilon_0 = 1 \quad (16)$$

gilt. Der Wert der elektrischen Feldkonstante (auch Permittivität des Vakuums, Dielektrizitätskonstante des Vakuums oder Influenzkonstante genannt) beträgt $\epsilon_0 = 8.8541878128(13) \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \text{ s}^4 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3}$, wobei die Klammerzahl (13) die aktuelle Unsicherheit in den beiden letzten Dezimalen des experimentell bestimmten Zahlenwerts von ϵ_0 angibt. Vor dem 20. Mai 2019 galt noch exakt $\epsilon_0 = 10^7 / (4\pi \cdot 299792458^2) \text{ As} / (\text{Vm})$.

Generell zeichnen sich natürliche Einheitensysteme dadurch aus, dass Naturkonstanten (bis auf möglichst einfache numerische Faktoren) als Basiseinheiten zugrunde gelegt werden. Durch die vier Bedingungen in (16) reduziert sich die Anzahl der 5 in der Praxis der Teilchenphysik relevanten SI-Einheiten s, m, kg, C (oder A) und K auf eine einzige festzulegende Basiseinheit, mit welcher der Wert aller relevanten Grössen in der Teilchenphysik ausgedrückt werden kann. Oft bedient man sich hierzu der Energieeinheit Elektron(en)volt (eV), welche durch $1 \text{ eV} = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ definiert ist. In der Kernphysik tauchen oft Energien der Grössenordnung Megaelektronenvolt und Gigaelektronenvolt ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$, $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.602176634 \cdot 10^{-10} \text{ J}$) auf, in der Hochenergiephysik arbeitet man zur Zeit im TeV-Bereich (Teraelektronenvolt, $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$).

Im SI-System ist ja $\hbar c = 197.3269982 \dots \text{MeV} \cdot \text{fm} \simeq 200 \text{MeV} \cdot \text{fm} = 0.2 \text{GeV} \cdot \text{fm}$. In der Teilchenphysik gilt aber $\hbar c = 1$. Deshalb kann beispielsweise eine Distanz d von einem Femtometer wegen $0.2 \text{GeV} \cdot \text{fm} \simeq 1$ in der Teilchenphysik mit Hilfe inverser Energieeinheiten alternativ durch $d = 1 \text{fm} \simeq 1/(0.2 \text{GeV}) = 5 \text{GeV}^{-1}$ angegeben werden.

Im allgemeinen Fall lässt sich der Wert G_{TP} einer in der Teilchenphysik durch Potenzen der gewählten Basisenergieeinheit ausgedrückten physikalischen Grösse in ihren Wert G_{SI} in SI-Einheiten umrechnen, indem man G_{TP} mit Potenzen der Konstanten \hbar , c , k_B und ϵ_0 im SI-System derart multipliziert, dass G_{SI} die korrekten Einheiten im SI-System erhält:

$$G_{SI} = G_{TP} \cdot \hbar_{SI}^\alpha \cdot c_{SI}^\beta \cdot k_{B,SI}^\gamma \cdot \epsilon_{0,SI}^\delta \quad \text{für geeignete } \alpha, \beta, \gamma, \delta. \quad (17)$$

Das Coulomb-Gesetz für die Kraft F zwischen zwei Ladungen q und Q im Abstand r lautet im SI-System

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}, \quad (18)$$

in der Teilchenphysik

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{qQ}{r^2}, \quad (19)$$

während im oben nicht besprochenen Gaußschen Einheitensystem

$$F = \frac{qQ}{r^2} \quad (20)$$

gilt.

Symmetrien und Gruppen in der Physik

Die Gruppentheorie spielt im Zusammenhang mit dem Symmetriebegriff eine zentrale Rolle in der Physik. Symmetrie ist die Eigenschaft eines Objekts \mathcal{O} , unter einer gewissen Menge $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ von Transformationen unverändert zu bleiben. Die Menge dieser Transformationen bildet eine Gruppe, wenn sich alle der betrachteten Transformationen rückgängig machen lassen. Die Umkehrung einer Transformation $T \in \mathcal{T}(\mathcal{O})$ entspricht dann einer Transformation mit dem inversen Element T^{-1} . Sowie so kann man zwei Transformationen T_1 und T_2 in $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ hintereinander durchführen und so zu $T_2 T_1 \in \mathcal{T}(\mathcal{O})$ verknüpfen. Ein Würfel ist unter einer endlichen Anzahl von Drehungen und Spiegelungen invariant und damit ein symmetrisches Objekt; eine Kugel ist unter unendlich vielen Drehungen und Spiegelungen invariant und besitzt damit eine noch grössere Symmetrie(gruppe) als der Würfel; der dreidimensionale euklidische affine Raum ist zudem noch translationsinvariant. In der Quantenfeldtheorie ist das *Vakuum* oft als physikalischer Zustand höchster Symmetrie definiert. Jedes Objekt besitzt zumindest die triviale Symmetriegruppe, welche aus nur einem Element besteht: die Identität, welche das Objekt der Betrachtung unberührt lässt.

Die in der Physik untersuchten symmetrischen Objekte sind oft physikalische Systeme oder ausgewählte Eigenschaften derselben, können aber auch abstrakterer Natur sein. Auch die Naturgesetze, denen physikalische Systeme unterworfen sind, weisen Symmetrien auf. Man unterscheidet bei theoretischen Untersuchungen in etwas salopper Sprechweise zwischen *kontinuierlichen* und *diskreten Symmetrien*. Die Begriffe 'kontinuierlich' und 'diskret' sind topologischen Ursprungs.

Zu den kontinuierlichen Symmetrien zählen die sogenannten 'äusseren' Raumzeitsymmetrien wie die Lorentz- oder Poincaré-Invarianz der Naturgesetze in der idealisierten flachen vierdimensionalen Raumzeit $\sim \mathbb{R}^{1,3}$ und die 'inneren' (Eich-)Symmetrien wie die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ der elektroschwachen Eichtheorie und die $SU(3)_C$ -Symmetrie der Quantenchromodynamik. Diskrete Symmetrien tauchen beispielsweise in der Kristallographie auf, aber auch in Form der symmetrischen Gruppe S_n , wenn es um Symmetrieeigenschaften fermionischer oder bosonischer Quantensysteme geht.

Manchmal sind Symmetrien nicht exakt oder nur eingeschränkt gültig, aber dennoch nützlich für die Phänomenologie physikalischer Systeme, wie im Falle der *approximativen* $SU(2)$ -Isospin-Symmetrie in der Kern- und Teilchenphysik oder der Flavoursymmetrie $SU(3)_F$, welche durch die zwar verschiedenen, aber relativ geringen Massen der *up*-, *down*- und *strange*-Quarks und die im Rahmen gewisser Betrachtungen geringen symmetriebrechenden Effekte der elektroschwachen Wechselwirkung dieser Quarks ihre Berechtigung erhält.

Die diskreten Symmetrien der Ladungskonjugation C , der Raumspiegelungssymmetrie P und der Zeitumkehrinvarianz T sind tatsächlich keine Symmetrien aller uns bekannten Naturgesetze. Die Kombination CPT gilt aber als fundamentale Symmetrie der relativistischen Quantenfeldtheorien, welche der Beschreibung der uns bekannten Prozesse in der Teilchenphysik dienen.

Spontane Symmetriebrechung

Eine ganz alltägliche, aber vielen Leuten gänzlich unbewusste Tatsache beruht auf der Beobachtung, dass die Symmetrie eines Naturgesetzes im Allgemeinen nicht der Symmetrie der Objekte gleich ist, welche dem Gesetz unterworfen sind. Dies lässt sich durch eine einfache Aufgabe leicht veranschaulichen. Man stelle sich hierzu vor, dass vier Städte aus Spargründen durch ein möglichst kurzes Bahnnetz miteinander verbunden werden sollen. Zufälligerweise sollen die Standorte der städtischen Bahnhöfe allesamt präzise auf den Eckpunkten eines Quadrates liegen, wobei Eisenbahnknoten ausserhalb der Städte erlaubt sein sollen. Vereinfachend nehmen wir an, dass die Kantenlänge dieses Quadrats gerade eine Masseinheit beträgt, welche wir nicht weiter notieren wollen. Jede Stadt besitzt also zwei Nachbarstädte im Abstand 1, und eine weitere Nachbarstadt im Abstand $\sqrt{2}$. Das vorliegende Problem ist ein Spezialfall eines *Steinerbaumproblems* (nach dem Schweizer Mathematiker Jakob Steiner), bei welchem das kürzeste Wegnetz zwischen endlich vielen vorgegebenen Punkten in der

euklidischen Ebene gesucht wird.

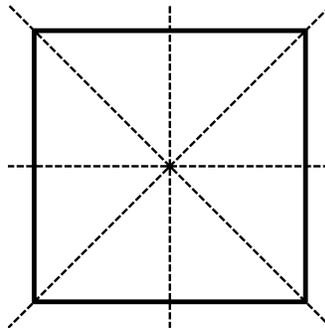


Abbildung 1: Achsen der Spiegelungen, welche das dargestellte Quadrat wieder zur Deckung bringen.

Naiverweise würde man erwarten, dass die Lösung des Problems dieselbe Symmetrie aufweisen sollte wie das Quadrat. Auf diese Lösung wollen wir nun kurz eingehen. Ein Quadrat ist sicher invariant unter folgenden Transformationen: der Identität $I = R_0$, welche als Rotation um einen Winkel von 0° aufgefasst werden kann, sowie unter Drehungen $R_{1/4}$, $R_{1/2}$, $R_{3/4}$ um 90° , 180° und 270° im mathematisch positiven Sinne, dem Gegenuhrzeigersinn (aus überirdischer Sicht). Hinzu kommen Spiegelungen an Achsen, wie sie in Abbildung 1 eingezeichnet sind. Diese wollen wir mit S_0 (horizontale Achse), S_1 (im Gegenuhrzeigersinn gegenüber der horizontalen Achse um 45° gedrehte Achse), S_2 (vertikale Achse) sowie mit S_3 für die verbleibende Achse bezeichnen. Natürlich liessen sich die Spiegelungen auch als räumliche dreidimensionale Drehungen von 180° um die Spiegelachsen auffassen.

Die Symmetriegruppe unseres Problems ist die sogenannte Diedergruppe D_4 und besteht also aus den Elementen

$$\{R_0, R_{1/4}, R_{1/2}, R_{3/4}, S_0, S_1, S_2, S_3\}. \quad (21)$$

Zwar kommutieren die Drehungen innerhalb der zyklischen Untergruppe $C_4 = \{R_0, R_{1/4}, R_{1/2}, R_{3/4}\}$, doch es gilt auch

$$S_1 \cdot R_{1/4} = S_0, \quad R_{1/4} \cdot S_1 = S_2, \quad (22)$$

es ist also $S_1 \cdot R_{1/4} \neq R_{1/4} \cdot S_1$, wovon man sich leicht mit einem beschrifteten Papierquadrat überzeugt. D_4 ist nicht-abelsch.

Wie aber sieht nun das kürzeste Verbindungsnetz zwischen den Eckpunkten eines Quadrates aus? Natürlich bilden die Kanten des Quadrats ein Verbindungsnetz der Länge 4 zwischen allen vier Städten. Nützt man aber die Diagonalen im Quadrat wie in Abbildung 2 dargestellt aus, so ist jede Stadt von einer anderen Stadt aus über ein kürzeres Verbindungsnetz der Gesamtlänge $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2.8284 \dots$ zu erreichen. Beide bisher präsentierten Verbindungsnetzvorschlage besitzen dieselbe Symmetriegruppe wie das Quadrat, sind invariant unter den Drehungen und Spiegelungen der Diedergruppe D_4 . Es geht aber noch besser. Abbildung 3 zeigt zwei Verbindungsnetze der Gesamtlänge $\sqrt{3} + 1 \simeq 2.7320 \dots$, welche tatsächlich 3.41% kürzer sind als der in Abbildung 2 dargestellte Vorschlag der Länge $\sqrt{8} \simeq 2.8284 \dots$. Beide im Wesentlichen gleichwertigen und tatsächlich *optimalen* Lösungen besitzen eine kleinere Symmetriegruppe als das gestellte Problem! Im Gegensatz zum Quadrat kommen sie bei einer Drehung um 90° nicht mit sich selbst zur Deckung. Die Symmetriegruppe der Lösungen ist eine *Untergruppe* der D_4 und besteht aus den vier Transformationen

$$D_2 = \{R_0, R_{1/2}, S_0, S_2\}. \quad (23)$$

Scherzhafterweise könnte man hier anbringen, dass das als *spontane Symmetriebrechung* (SSB) bezeichnete Phänomen der Diskrepanz zwischen der Symmetrie der Spielregeln und der Symmetrie der den Spielregeln

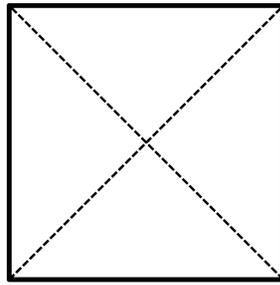


Abbildung 2: Verbindungsnetz (gestrichelte Strecken) der Gesamtlänge $\sqrt{8} \simeq 2.8284 \dots$ zwischen den Eckpunkten eines Einheitsquadrates der Kantenlänge 1. Das Verbindungsnetz besitzt zum Quadrat analoge Symmetrieeigenschaften, ist aber nicht optimal.

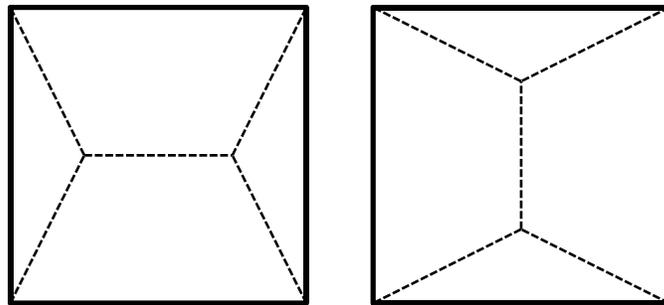


Abbildung 3: Kürzeste Verbindungsnetze (gestrichelte Strecken) der Gesamtlänge $\sqrt{3} + 1 \simeq 2.7320 \dots$ zwischen den Eckpunkten eines Einheitsquadrates der Kantenlänge 1. Die beiden kleinen Winkel in den Dreiecken betragen 30° .

unterworfenen Spielteilnehmer eine Erklärung für den Sündenfall liefert: Die göttlichen Gesetzte waren zwar wohlgeordnet und von höchster Perfektion, doch bei der Ausführung der Gesetzte haperte es dann doch.

Die SSB ist es letztlich, welche die Existenz einer nicht trivialen Welt ermöglicht. Die Naturgesetze selbst weisen in zumindest sehr guter Näherung eine Translations- und eine Rotationsymmetrie auf. So sind die Naturgesetze in Paris dieselben wie hinter dem Mond. Die Feinstrukturkonstante scheint eine echte Konstante zu sein und nicht von Ort und Zeit abzuhängen. Ein Taschenrechner funktioniert im leeren Raum in genau gleicher Weise, wenn er um einen beliebigen Winkel gedreht wird. Dennoch besteht die Welt nicht aus einem homogenen Medium, sondern aus nicht rotationssymmetrischen Entitäten wie Stühlen, Weinflaschen und Singvögeln, die durch Drehung und Verschiebung in einen veränderten Zustand versetzt werden, doch nicht die Naturgesetze, denen die Dinge unterliegen. In vielen quantenfeldtheoretischen Modellen ist das *Vakuum* der Zustand mit der grössten Symmetrie - so kann das Vakuum beispielsweise als translations- und rotations-invariant vorausgesetzt werden, und damit ist es dann auch recht strukturarm.

Um die ganze Angelegenheit der spontanen SSB für die (Quanten-)Physik noch etwas interessanter zu gestalten, kann man die SSB in speziellerer Form als Diskrepanz zwischen der Symmetrie der in einem physikalischen System herrschenden Gesetze und der Symmetrie eines *Grundzustandes* auffassen. Bei einem Grundzustand als Zustand niedrigster Energie erwartet man das höchste Mass an Symmetrie, denn der Grundzustand ist in ge-

wissem Sinne am wenigsten angeregt und sollte somit die einfachste Struktur und damit die grösste Robustheit unter Symmetrietransformationen aufweisen. Bei solchen Betrachtungen spielt die *Entartung* des Grundzustandes eine Rolle, und ob man (Quanten-)Systeme mit endlich oder unendlich vielen Freiheitsgraden betrachtet. Eine umfassende Behandlung aller Konzepte im Zusammenhang mit der SSB würde aber an dieser Stelle viel zu weit führen.

Theoretische Modelle mit spontaner Symmetriebrechung spielen in der Elementarteilchenphysik und vielen anderen Disziplinen der Physik eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit dem sogenannten Higgs-Mechanismus, wo eine spontane Symmetriebrechung für die Massen der W - und Z -Bosonen verantwortlich gemacht wird. Allerdings ist gerade an dieser Stelle eine Warnung angebracht: Die Literatur ist gespickt mit irreführenden Bemerkungen zu den Begriffen des Higgs-Mechanismus und der spontanen Symmetriebrechung. Tatsächlich können sogenannte *lokale Eichsymmetrien*, welche in der Formulierung vieler Modelle der theoretischen Teilchenphysik eine wichtige Rolle spielen, nicht spontan gebrochen werden, eine Tatsache, die als *Elitzers Theorem* bekannt ist. Man muss also unter Umständen ganz genau hinschauen, um zu begreifen, ob und was wirklich gebrochen wurde.

Symmetriebrechungsmechanismen können auch zur Erklärung des Unterschiedes zwischen Raum und Zeit herangezogen werden. Offensichtlich können unsere Naturgesetze auf einer vierdimensionalen Bühne mit drei räumlichen und einer zeitlichen Dimension formuliert werden, wenn man von der möglichen Existenz weiterer Dimensionen absieht. Dass die Zeit sich aber von den drei räumlichen Dimensionen unterscheidet, könnte die Konsequenz eines spontanen Symmetriebrechungsmechanismus auf einer übergeordneten physikalischen Ebene sein, die sich unserer wissenschaftlichen Sicht noch entzieht. Wenn Wasser gefriert, müssen sich die im flüssigen Wasser vorwiegend ungeordnet bewegenden Wassermoleküle spontan in räumlich willkürlich ausgerichteten Kristallisationsebenen anordnen. In ähnlicher Weise könnte die Raumzeit-Struktur von einer höheren Symmetrieebene ausgehend spontan zur beobachteten Raum- und Zeit-Struktur heruntergebrochen sein.

Man mag sich mit Fug und Recht die Frage stellen, weshalb wir drei Raumdimensionen, doch nur eine Zeitdimension wahrnehmen können. In der Tat wäre der 'Alltag' in einer Welt mit zwei Zeitdimensionen recht verwirrend, vor allem was die Terminplanung betrifft. Die aus der Existenz nur einer Zeitdimension folgende kausale Struktur unserer Welt ist eine wichtige theoretische Stütze, der in der Elementarteilchenphysik eine oft nicht manifest wahrgenommene, aber doch fundamentale Bedeutung zukommt.

Einschub: Teilchen, Wechselwirkungen und Wirkungsquerschnitte

“Wenn man für ein Experiment einen Statistiker benötigt, dann hätte man ein besseres Experiment durchführen sollen.”

Ernest Rutherford (1871-1937).

Der Begriff des *Wirkungsquerschnitts* ist von zentraler Bedeutung für die experimentelle und theoretische Atom-, Astro-, Kern- und Teilchenphysik und darüber hinaus für viele weitere naturwissenschaftlich-technische Anwendungs- und Forschungs-Bereiche. Als Formelzeichen für den Wirkungsquerschnitt wird üblicherweise der griechische Buchstabe σ verwendet.

Der Wirkungsquerschnitt ist ein bestimmendes Mass für die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen einfallenden Teilchen (oder *Projektilen* in einem Teilchenstrahl) und Zielteilchen (welche im experimentellen Rahmen einen Streukörper oder das *Target* bilden) ein bestimmter Prozess wie beispielsweise eine Streuung (d.h., eine elastische oder inelastische Ablenkung des Projektils an einem Zielteilchen), eine Absorption oder eine weitere spezifische Reaktion stattfindet, bei welcher durchaus auch neue Teilchen erzeugt werden können. Entsprechend spricht man präziser von Streuquerschnitten σ_s , Absorptionsquerschnitten σ_a und vielen weiteren Reaktionstypen entsprechenden Reaktionsquerschnitten σ_r . Die Unterscheidung kollidierender Teilchen in Projektilen und Targets ist natürlich künstlicher Natur. Sie widerspiegelt aber die häufig experimentell vorliegende Situation, bei welcher aus einer Beschleunigeranlage stammende Projektilen auf eine im Labor ruhende Probe geschossen werden.

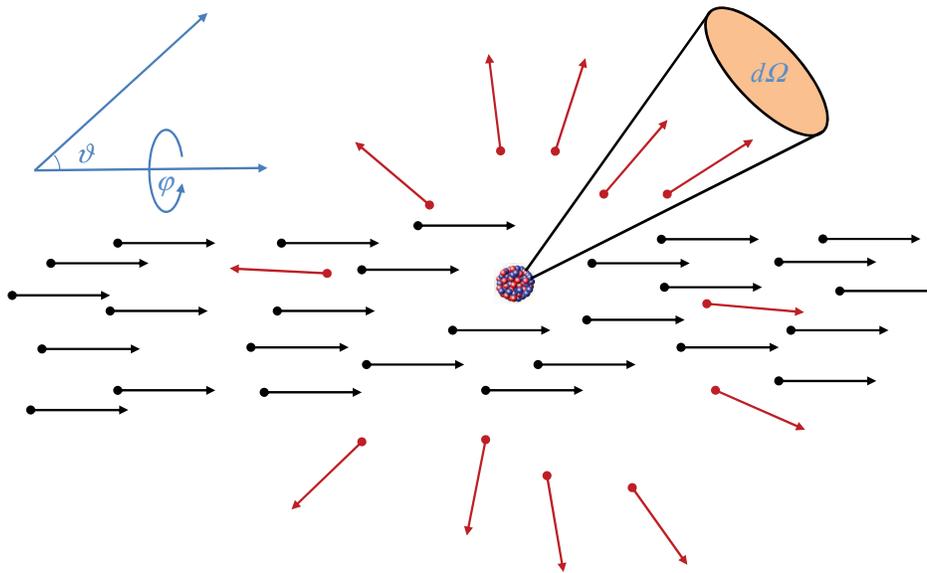


Abbildung 4: Klassisches Sinnbild für die Streuung von Projektilen an einem anfänglich ruhenden Atomkern. Weit vom als Streuzentrum agierenden Atomkern befindliche Detektoren stellen fest, wieviele Teilchen des von links einfallenden Teilchenstroms in einen (bei theoretischen Betrachtungen oft infinitesimalen) Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden. Bei axialer Symmetrie bezüglich der Einfallsrichtung der Projektilen charakterisiert die Angabe der kinetischen Energie der Projektilen E_{kin} und eines Streuwinkels ϑ einen elastischen Streuvorgang bei Abwesenheit innerer Drehimpulse vollständig. Bei komplizierteren experimentellen Anordnungen muss detaillierter nach Streuwinkeln, Energien, Polarisationen und Reaktionskanälen differenziert werden.

Die experimentelle Untersuchung von Wirkungsquerschnitten liefert gewissermassen die Grundlage der Theorien über die Wechselwirkungen, welche unsere Welt im Innersten, im Äussersten und dazwischen regieren.

Wie durch den Ausdruck selbst angedeutet handelt es sich bei einem Wirkungsquerschnitt um eine als effektive Wirkfläche darstellbare Grösse. Man stellt sich vor, dass das Targetteilchen eine Zielscheibe der Grösse des Wirkungsquerschnitts vor den Projektilen aufspannt, welche die dem Wirkungsquerschnitt entsprechende Reaktion auslösen, wenn sie die Zielscheibe treffen. Auch wenn diese Vorstellung der diffusen Quantenrealität des Streuvorganges nicht gerecht wird, so stellt sie dennoch eine effiziente Strategie dar, mit welcher sich zahlreiche experimentelle Daten und theoretische Aussagen anschaulich beschreiben lassen. Natürlich ergibt sich ein Wirkungsquerschnitt in physikalisch realisierten Situationen jeweils aus den *Wechselwirkungen*, an welchen *sowohl* das Projektil *wie auch* das Target *wechselseitig* beteiligt sind; in idealisierten Betrachtungen wird das Target oft als *unverrückbare*, unendlich schwere Quelle eines *statischen* Kraftfeldes angesetzt.

Betrachten wir eine typische experimentelle Anordnung zur Analyse eines Streuvorganges, bei der ein Targetteilchen einer möglichst *homogenen*, *kollinearen* und *monoenergetischen* Teilchenstromdichte I von Projektilen ausgesetzt ist, so sind natürlich die Teilchen von Interesse, welche das Targetteilchen nicht unbeeinflusst passieren. Die Teilchenstromdichte $\vec{I} = \rho_i \vec{v}_i$ beschreibt die Anzahl der Teilchen, die pro Flächen- und Zeit-Einheit aus grosser Entfernung mit einheitlichem *initialem* Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_i \neq 0$ auf das Target zuströmen, welches sich also im Rahmen der vorliegenden Diskussion aus Gründen der Einfachheit in Ruhe befindet möge. Dabei ist $\rho_i \neq 0$ die *initiale* Projektil-Teilchendichte in grosser Entfernung vom Targetteilchen in zur asymptotischen Geschwindigkeit \vec{v}_i entgegengesetzten Richtung.

Die Zahl aller pro Zeiteinheit abgelenkten Teilchen lässt sich durch eine *totale Streurrate* R_s angeben. Das Verhältnis

$$\sigma_s = \frac{R_s}{I} \quad (24)$$

besitzt dann die physikalische Dimension einer *Fläche* und wird als *totaler Streuquerschnitt* σ_s bezeichnet.

Um im Rahmen einer *klassischen*⁵ Beschreibung von Streuvorgängen präzise zu argumentieren, muss auf gewisse Idealisierungen zurückgegriffen werden. Die obigen Forderungen lassen sich formal durch

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{v}(\vec{x} + \vec{v}_i t) = \vec{v}_i \quad (25)$$

für das stationäre Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ der Projektilen und

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \rho(\vec{x} + \vec{v}_i t) = \rho_i \quad (26)$$

für die lokale stationäre Projektildichte $\rho(\vec{x})$ ausdrücken. Da für die meisten Streuexperimente im Labor die Effekte der Raumzeitkrümmung vernachlässigbar sind, kann \vec{x} getrost als kartesische Koordinate oder Ortsvektor im flachen dreidimensionalen Raum aufgefasst werden. In einer erweiterten Diskussion könnten auch noch Eigendrehimpulszustände der Reaktionspartner mit einbezogen werden.

Wie andere (totale) Wirkungsquerschnitte auch hängt der totale Streu(wirkungs)querschnitt im Allgemeinen von der kinetischen Energie der Reaktionspartner ab. Bleibt die gesamte kinetische Energie der aneinander streuenden Teilchen beim Streuvorgang erhalten, so spricht man von einer *elastischen* Streuung; andernfalls ist die Streuung *inelastisch*, und ein Teil der kinetischen Energie geht in die Anregung der Streupartner über. So kann ein Elektron bei der Streuung an einem Atom dieses anregen; ebenso kann ein Neutron einen Atomkern im Grundzustand in einen angeregten Zustand versetzen, sofern die kinetische Energie des Neutrons ausreichend

⁵Die klassische Physik umfasst die Teilgebiete der Physik, welche ohne Konzepte der modernen Physik, vor allem der Quantisierung, auskommen.

gross ist. In einem erweiterten Sinne kann auch ein Absorptionsvorgang, bei welchem das Projektil verschwindet, oder noch allgemeiner jegliche Reaktion als Streuvorgang gedeutet werden; die ursprünglich vorhandenen Teilchen werden in neue Zustände 'hineingestreut'.

Bei der klassischen Streuung von *Massepunkten* an einer starren und unendlich harten Kugel mit Radius R ist, wie man sich leicht vorstellt, der totale Streuquerschnitt durch den Querschnitt πR^2 der Kugel gegeben. Streut man aber ein elektrisch geladenes Teilchen - beispielsweise ein Elektron - an einem anderen geladenen Teilchen - beispielsweise an einem Proton - so erweist sich der totale Streuquerschnitt als unendlich gross, denn schliesslich werden *alle* Teilchen durch ein elektrisches Feld unendlicher Reichweite gestreut. Selbst wenn sich die Wechselwirkung zwischen den aneinander streuenden Teilchen mit wachsendem Abstand r viel schneller abschwächt als im Falle der elektromagnetischen Wechselwirkung, wie dies beispielsweise bei der manchmal durch das exponentiell abfallende Yukawa-Potential $\sim e^{-\kappa r}/r$ phänomenologisch beschriebenen Kernkraft der Fall ist, so muss man im Rahmen einer *klassischen* Betrachtung schliessen, dass die Streurate und der totale Streuquerschnitt unendlich gross sind, da unendlich viele Teilchen zwar nur marginal, aber letztlich *immer* am Zielkern gestreut werden.

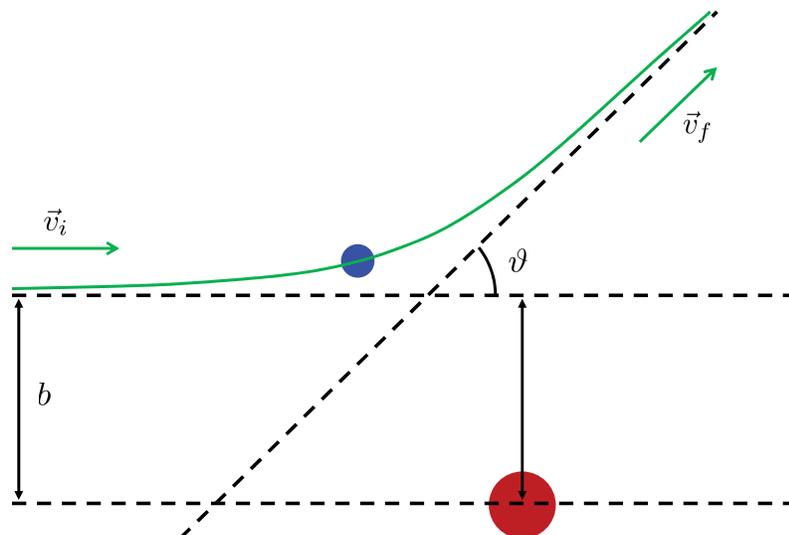


Abbildung 5: Ein von links einfallendes Projektil (blau) streut mit Impaktparameter b an einem Targetteilchen (rot) und wird um einen asymptotischen Winkel ϑ abgelenkt. Tatsächlich muss ein solcher klassischer Vorgang entgegen der Darstellung nicht planar ablaufen. Relevant sind letztlich die vorgängig experimentell präparierten Ausgangszustände der streuenden Teilchen und deren Endzustände, welche nach hinreichend langer Zeit beobachtet und durch diverse Parameter wie Streuwinkel, Geschwindigkeiten oder Spinvariablen et cetera beschrieben werden.

Im Rahmen einer *klassischen* Betrachtung stellt man sich ja im Sinne der Forderungen (25) und (26) eine unendlich ausgedehnte Verteilung von Projektilen vor, welche in grosser Ferne mit fester Projektilsdichte ρ_i und Geschwindigkeit \vec{v}_i auf das Targetteilchen zuströmt, wobei einem *einzelnen* Projektil jeweils ein sogenannter *Impaktparameter* (oder *Stossparameter*) zugeordnet werden kann. Als Impaktparameter bezeichnet man dabei den minimalen Abstand der jeweiligen Stosspartner, der sich ergeben würde, wenn zwischen den beiden Teilchen keine Kraft wirken würde und sie sich daher auf geradlinigen Bahnen passieren würden (siehe Abbildung 5).

Bei Streuprozessen besteht aber ein bemerkenswerter Unterschied zwischen dem klassischen und dem quanten-

mechanischen Fall. Die störungstheoretische Analyse der Streuung an einem Yukawa-Potential ergibt, dass der totale Streuquerschnitt tatsächlich *endlich* ist, trotz der unendlichen Reichweite des Potentials und der durch das Potential vermittelten Kräfte. Interferenzeffekte sorgen dafür, dass in der Quantenmechanik der totale Yukawa-Streuquerschnitt endlich und nicht mit einer *Infrarotdivergenz* wie im Falle der Coulomb-Wechselwirkung behaftet ist.

Deckt nun ein Detektor fern des Reaktionszentrums einen (für die theoretische Diskussion infinitesimalen) Raumwinkel $d\Omega$ ab, so kann die Anzahl der Teilchen gezählt werden, welche pro Zeiteinheit in diesen Raumwinkel hinein gestreut werden.

Damit gelangt man zum Begriff des *differentiellen Wirkungsquerschnitts* $d\sigma/d\Omega$. Bei der naheliegenden Wahl von Kugelkoordinaten, deren Ursprung durch die initiale Lage des Targetteilchens gegeben ist und deren Polachse in Richtung der initialen Projektilgeschwindigkeit \vec{v}_i durch den Ursprung verläuft, ist die Streurichtung der Projektile durch den Polarwinkel ϑ und einen Azimutwinkel φ , wie in Abbildung 4 dargestellt, gegeben. Die Anzahl der pro Zeiteinheit in einen infinitesimalen Raumwinkel $d\Omega$ in Richtung ϑ und φ gestreuten Teilchen ist dann

$$R(\vartheta, \varphi)d\Omega = I \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (27)$$

Dabei muss man sich immer im Klaren darüber sein, dass die Streuwinkel ϑ und φ die Flugrichtung gestreuter Teilchen nach *unendlich langer Zeit* charakterisieren.

Die sogenannte *Rutherford'sche Streuformel*

$$\frac{d\sigma_s^R}{d\Omega} = \frac{1}{16} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)} = \frac{d^2}{16} \sin^{-4}(\vartheta/2) \quad (28)$$

beschreibt den klassischen nicht-relativistischen differentiellen Wirkungsquerschnitt der Streuung eines punktförmigen, strukturlosen Teilchens der elektrischen Ladung q und kinetischen Energie E an einer unendlich schweren, ruhenden und unbeweglichen Punktladung Q gleichen Vorzeichens im Ursprung des Kugelkoordinatensystems, wobei die auf das Projektil ausgeübte Kraft $\vec{F}_C = -\vec{\nabla}V_C$ durch das Coulomb-Potential $V_C(r) = qQ/(4\pi\epsilon_0 r)$ im SI-System bestimmt ist. Dabei ist ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante im Vakuum und r der Abstand des Projektils vom Target im Koordinatenursprung. Es wird vorausgesetzt, dass das beschleunigte Projektil nicht strahlt. d ist der kleinste Abstand zwischen den repulsiven Streupartnern, welcher bei einem zentralen Stoss mit Impactparameter $b = 0$ erreicht wird (der '*closest approach*').

Durch Streuexperimente von α -Teilchen - also Heliumatomkernen, welche sich jeweils aus zwei Protonen und zwei Neutronen zusammensetzen - an dünnen Goldfolien konnte der bedeutende neuseeländische Physiker Ernest Rutherford zusammen mit den Kollegen Hans Geiger und Ernest Marsden schliesslich im Jahre 1911 zeigen, dass Goldatome einen kleinen schweren und elektrisch geladenen Kern besitzen müssen, welcher von viel leichteren Elektronen umgeben ist. α -Teilchen, welche von einer Radium-226-Quelle mit einer Geschwindigkeit von etwa 15000km/s emittiert werden, wurden von Rutherford et al. als gerichteter Teilchenstrahl auf Goldatome geschossen. α -Teilchen werden durch die viel leichteren Elektronen in einer Goldfolie kaum von ihrer Bahn abgelenkt, jedoch kommt es vor, dass einige der α -Projektile durch die kleinen, aber schwereren und elektrisch geladenen Goldatomkerne in guter Näherung gemäss der Rutherford'schen Streuformel (28) aus ihrer ursprünglichen Bahn herausgestreut werden. Solche α -Teilchen konnte Rutherford auf einem Zinksulfid-Fluoreszenzschirm nachweisen und dadurch für den Goldatomkernradius eine obere Grenze von $3.4 \cdot 10^{-14}\text{m}$ angeben, wobei zur damaligen Zeit bereits bekannt war, dass sich der Atomradius in der Grössenordnung von 10^{-10}m bewegt. Die Erkenntnisse Rutherfords unterstützten das atomare 'Planeten-Modell' des japanischen Physikers Nagaoka Hantarō aus dem Jahre 1904 und ebneten schliesslich auch den Weg zu Niels Bohrs Atommodell (1913).

Tatsächlich waren die von Geiger, Marsden und Rutherford verwendeten Goldfolien lediglich einige 0.0001cm dick, wodurch eine *Mehrfachstreuung* der α -Teilchen beim Durchgang durch die Goldfolie an zwei oder mehreren Goldatomkernen sehr unwahrscheinlich war.

Nun ist ja der totale Rutherford-Streuquerschnitt

$$\int_{4\pi} d\Omega \frac{d\sigma_s^R}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \frac{d\sigma_s^R}{d\Omega} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \int_0^\pi d\vartheta \frac{\sin\vartheta}{\sin^4(\vartheta/2)} = \infty \quad (29)$$

wegen des divergenten Verhaltens des differentiellen Rutherford-Streuquerschnitts für $\vartheta \rightarrow 0$ unendlich gross; beobachtet man allerdings nur die Teilchen, welche um einen Winkel $\vartheta > \vartheta_{min}$ aus der Einfallsrichtung gestreut werden, so erhält man nach kurzer Rechnung das vom Minimalwinkel ϑ_{min} abhängige endliche Resultat

$$\sigma_s^R(\vartheta > \vartheta_{min}) = 2\pi \int_{\vartheta_{min}}^\pi d\vartheta \sin\vartheta \frac{d\sigma_s^R}{d\Omega} = \frac{\pi}{4} d^2 \cot^2(\vartheta_{min}/2). \quad (30)$$

Berechnet man damit den integralen Rutherfordschen Streuquerschnitt für α -Teilchen mit einem minimalen Streuwinkel $\vartheta_{min} = 1^\circ = \pi/180$, so ergibt sich unter Verwendung der entsprechenden Ladungen des α -Teilchens (zwei Elementarladungen, $q = 2 \cdot 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{C}$), des Goldatomkerns ($Q = 79 \cdot 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{C}$) sowie der α -Energie ($E \simeq 4.7843 \text{MeV} = 7.665 \cdot 10^{-13} \text{J}$) der Wert $\sigma_s^R(\vartheta > 1^\circ) \simeq 2.33 \cdot 10^{-23} \text{m}^2$. Die minimale Annäherung d beträgt dabei $4.755 \cdot 10^{-14} \text{m} = 47.55 \text{fm}^6$.

Eine in der Atom-, Kern- und Teilchen-Physik oft zur Angabe von Wirkungsquerschnitten verwendete Flächeneinheit ist das *Barn* mit dem Einheitenzeichen b; es liegt in der Grössenordnung typischer Wirkungsquerschnitte von Atomkernen und ist durch $1\text{b} = 10^{-24} \text{cm}^2 = (10 \text{fm})^2 = 10^{-28} \text{m}^2$ definiert.

Damit ergibt sich also ein integrierter Streuquerschnitt $\sigma_s^R(\vartheta > 1^\circ)$ von 233000b; ein Goldatomkern präsentiert sich den α -Teilchen als Zielscheibe dieser Fläche, und jedes Teilchen, welches diese Zielscheibe passiert, wird um mindestens ein Grad aus seiner initialen Bewegungsrichtung abgelenkt. Die tatsächliche Querschnittsfläche eines Goldatomkerns mit einem ungefähren Radius $r_{Au} \simeq 7 \cdot 10^{-15} \text{m} = 7 \text{fm}$ ist mit $\pi \cdot r_{Au}^2 \simeq 1.5\text{b}$ bedeutend kleiner als $\sigma_s^R(\vartheta > 1^\circ)$, doch erstreckt sich ja das Coulomb-Feld des Goldatomkerns über einen beliebigen Raumbereich.

Eine interessante Beobachtung ergibt sich aus der Berechnung des integrierten Streuquerschnitts der *rückwärts-gestreuten* α -Teilchen

$$\sigma_s^R(\vartheta > 90^\circ = \pi/2) = \frac{\pi}{4} d^2 \tan^{-2} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} d^2 \simeq 17.76\text{b}. \quad (31)$$

Diese Trefferfläche ist von der Grössenordnung d^2 und damit bedeutend kleiner als $\sigma_s^R(\vartheta > 1^\circ)$. Immerhin können α -Teilchen von einer Goldfolie abprallen, und diese Beobachtung macht klar, dass feste Materie wie Gold schwere kleine Kerne enthält und nicht als homogene 'puddingartige' Masse aufzufassen ist, welche α -Teilchen lediglich abbremsen würde. Rutherford verglich den erstaunlichen Vorgang der Rückwärtsstreuung mit dem Zurückprallen einer auf ein Stück Seidenpapier abgefeuerten 15-Zoll-Granate.

Als praktisches Beispiel sollen schliesslich kurz die wichtigsten Reaktionen *thermischer* Neutronen (n) mit einem Uran-235-Kern (^{235}U) und die quantitative Beschreibung durch entsprechende Wirkungsquerschnitte betrachtet werden.

⁶ 1fm = 10^{-15}m = 1 Femtometer = 1 Fermi. Aus dem Dänischen 'femten' = 'fünfzehn' bzw. nach Enrico Fermi (1901-1954), Nobelpreis für Physik 1938.

Die bei einer Kernspaltung von ^{235}U oder anderen spaltbaren Nukliden erzeugten Neutronen werden mit einer Geschwindigkeit der Grössenordnung 10000km/s von den beiden meist verschieden grossen Kernbruchstücken abgedampft. Thermalisiert man diese Neutronen anschliessend durch wiederholte Streuvorgänge an Atomkernen eines *Moderators* bei Raumtemperatur (wie beispielsweise Grafit oder Wasser bei $T = 293\text{K}$), welcher bei diesem Vorgang die Neutronen selbst in nur geringem Masse absorbiert, so gewinnt man schliesslich Neutronen, deren typische Geschwindigkeit durch die sogenannte *Westcott-Geschwindigkeit* $v_W = 2.2\text{km/s}$ charakterisiert wird. Neutronen dieser Geschwindigkeit besitzen eine kinetische Energie $E_{kin,n}$ von $4 \cdot 10^{-21}\text{J} = 0.025\text{eV}$, was dem Produkt der Boltzmann-Konstante $k = 1.380649 \cdot 10^{-23}\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ mit der Raumtemperatur T entspricht. Während sich die Wirkungsquerschnitte schneller Neutronen mit ^{235}U als ruhendes Target im Bereich weniger Barn befinden, sind thermische Neutronen bedeutend reaktionsfreudiger. Der Spaltquerschnitt (oder Fissionsquerschnitt) σ_f für Neutronen mit Westcott-Geschwindigkeit beträgt nämlich etwa 586b . In Abbildung 6 ist dieser Wirkungsquerschnitt als grösste Fläche mittlerer Graustufe angedeutet.

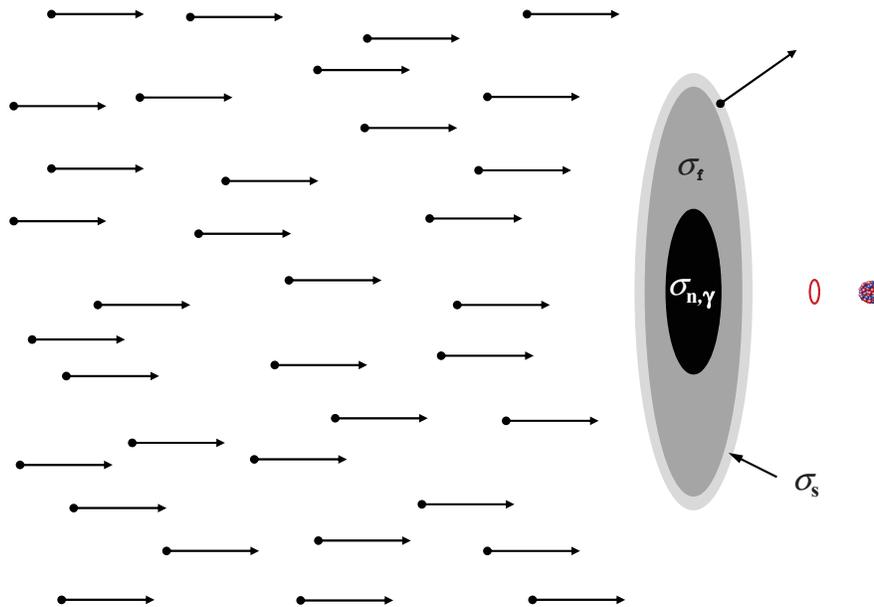


Abbildung 6: Wechselwirkungen von Neutronen mit einem ^{235}U -Kern. Die Zahl der pro Flächen- und Zeiteinheit den Kern passierenden Neutronen wird durch die *Neutronenstromdichte* I_n beschrieben. Die *totale Streurrate* $\dot{N}_s = I_n \cdot \sigma_s$ gibt die Zahl der pro Zeiteinheit unter einem beliebigen *nicht-verschwindenden* Winkel gestreuten Neutronen an.

Es besteht allerdings auch die Möglichkeit, dass ein Neutron von einem Uran-235-Kern ohne Spaltung eingefangen wird. Der so entstehende Uran-236-Zwischenkern ist angeregt und gibt seine Anregungsenergie durch Emission von γ -Quanten ab, weshalb der in Abbildung 6 schwarz dargestellte sogenannte thermische *Einfangquerschnitt* $\sigma_{n,\gamma}$ von etwa 98b mit den entsprechenden Symbolen indiziert ist. Der schmale hellgraue Rand in Abbildung 6 symbolisiert schliesslich den (totalen) Neutronenstreuquerschnitt σ_s von rund 15b für thermische Neutronen. Weitere Querschnitte sind im thermischen Bereich kaum erwähnenswert.

In Abbildung 7 ist die Energieabhängigkeit der in vielerlei Hinsicht wichtigsten Wirkungsquerschnitte für Neutronen an ^{235}U dargestellt. Erwähnenswert ist, dass sich der Wert des elastischen Streuquerschnitts über einen weiten Energiebereich von etwa 10^{-4}eV bis 0.1MeV vorwiegend zwischen 10b und 20b bewegt, im thermischen Bereich also bedeutend kleiner ist als der Einfang- und der Spaltquerschnitt. Dieses Verhältnis ändert sich aber bei Energien im MeV-Bereich. Die Tatsache, dass Neutronen in einer überkritischen Ansammlung

von Uran-235 oder Plutonium-239 von den Atomkernen vorwiegend gestreut werden und nicht ganz ungehindert aus der Anordnung entkommen können hat einen massgeblichen Einfluss auf die Grösse der kritischen Masse.

Bei geringen thermischen Neutronenenergien verhalten sich die in Abbildung 7 dargestellten Reaktionsquerschnitte näherungsweise gemäss einem sogenannten $1/v$ -Gesetz; je langsamer ein Neutron auf einen Uran-235-Kern trifft, desto länger hat es Zeit, eine Spaltung oder einen Einfang auszulösen, und entsprechend verhalten sich die Reaktionsquerschnitte σ_f und $\sigma_{n,\gamma}$. Bei höheren Energien im Bereich von etwa 1eV bis einige 1000eV lassen sich zahlreiche Einfangresonanzen beobachten, bei welchen in einem jeweils sehr engen Resonanz-Energiebereich die entsprechenden Querschnitte hohe Werte erreichen. Das komplexe Verhalten der Querschnitte in diesem Bereich spiegelt die komplexe Struktur des grossen, aus 92 Protonen und 143 Neutronen zusammengesetzten Kerns wider, welcher als oszillationsfähiges quantenmechanisches System resonant auf die äussere Anregung durch die einfallende Neutronenwellenfunktion reagieren kann.

Wiederum sind die zu beobachtenden Wirkungsquerschnitte grösser als die Querschnittfläche der Urankerns als kompakte Nukleonenkugel; allerdings sind die angegebenen Querschnitte wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte und der Ladungsfreiheit des Neutrons endlich.

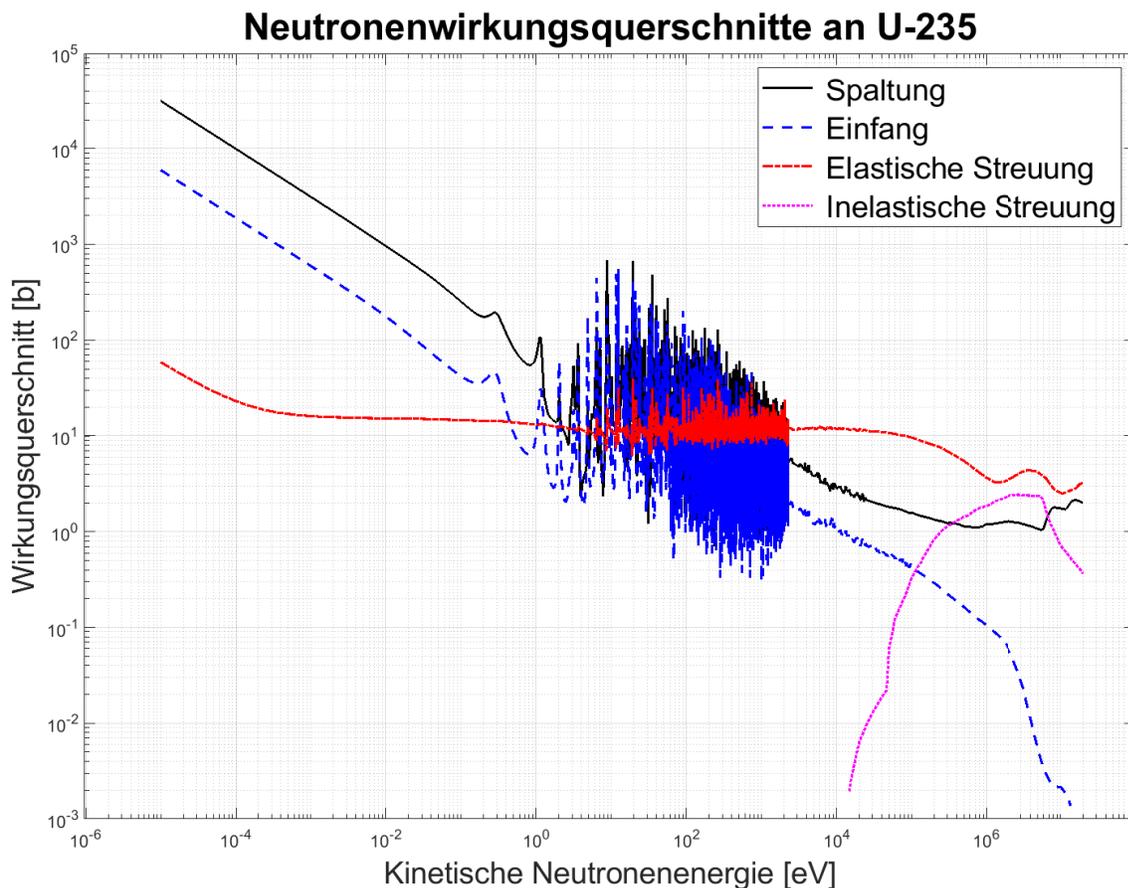


Abbildung 7: Energieabhängigkeit wichtiger Neutronenwirkungsquerschnitte.

Die bisherigen Betrachtungen machten durchwegs vom klassischen Teilchenbild Gebrauch. In der quantenmechanischen Behandlung von Streuprozessen werden einzelne Projektile schliesslich durch Wellenfunktionen repräsentiert, welche in grosser Entfernung entgegen der Einfallsrichtung der Projektile einen einheitlichen lokalen Impulserwartungswert aufweisen.

Vorbemerkung: Raum-Zeit-Strukturen

Von Newton zu Einstein

Als Vorbemerkung zur nachfolgenden mathematisch-formalen Behandlung der relativistischen Raumzeitstruktur soll in diesem Unterkapitel zuerst die Grundidee der speziellen Relativitätstheorie in stark geraffter Form rekapituliert werden.

In der vor-relativistischen Physik stellte man sich den physikalischen Raum als dreidimensionalen euklidischen affinen Raum V_E^3 vor, welcher in Anlehnung an die Ideen Isaac Newtons die Bühne für die einer absoluten, gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendwelche Gegenstände verfließenden Zeit unterworfenen Vorgänge liefert. Diese für gewisse Betrachtungen nach wie vor nützliche Vorstellung basiert auf der alltäglichen Erfahrung, dass man zwischen zwei Orten im physikalischen Raum - im scharf lokalisierten Idealfall zwischen zwei Punkten - einen Abstand messen kann. Dabei ist der physikalische Raum bei Abwesenheit starker Gravitation in sehr guter Näherung homogen und isotrop (d.h. strukturell richtungsunabhängig), ein 'Ursprung' oder 'Raum-Mittelpunkt' lässt sich nicht finden, was das Attribut der Affinität in der mathematischen Raumbezeichnung begründet. Zudem lässt die Beobachtung unserer räumlichen Umwelt die Einführung von Koordinatensystemen zu, welche jeden Raumpunkt durch drei Koordinaten (x, y, z) charakterisieren. Liegt schliesslich ein solches räumliches und durch einen denkenden Beobachter definiertes Gebilde vor, das erforderlich ist, um das zeitliche Verhalten ortsabhängiger physikalischer Grössen eindeutig und vollständig zu beschreiben, so spricht man von einem Bezugssystem.

Die in Bezugssystemen verwendeten Koordinatensysteme können allerdings 'krummlinig' oder beschleunigt sein und aus praktischer Sicht somit recht unangenehm. Daher mag man vorerst und mit Vorteil sogenannte *Inertialsysteme* betrachten, in welchen *alle* drei Newtonschen Gesetze uneingeschränkt gelten sollen; das erste dieser Gesetze nennt die geradlinig-gleichförmige Bewegung von kräftefreien Körpern als wesentliche Eigenschaft eines Inertialsystems, wobei man bereits hier über die Natur der Kräfte ins Philosophieren verfallen könnte. Das zweite Newtonsche Gesetz definiert Kräfte durch die von ihnen verursachten Beschleunigungen. Das dritte Newtonsche Gesetz schliesslich verlangt, dass es zu jeder Kraft eine Gegenkraft geben muss, wobei ausschliesslich Kräfte gemeint sind, die auf Wechselwirkungen zwischen Körpern zurückgehen. In solchen Inertialsystemen, welche unpräzise auch als 'unbeschleunigte' Bezugssysteme bezeichnet werden, können spezielle Koordinatensysteme in Übereinstimmung mit der idealisiert angenommenen Raumstruktur in homogener und isotroper Weise so eingeführt werden, dass der Abstand $d(P_1, P_2) > 0$ zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 mit Koordinaten (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_3) durch den Satz des Pythagoras

$$d(P_1, P_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \geq 0 \quad (32)$$

berechnet werden kann. Abbildung 8 stellt zwei solche Punkte im V_E^3 mit ihren als Spaltenvektoren notierten Koordinatentripeln mittels einer zweidimensionalen Grafik dar; die Koordinatenachsen stehen dabei *senkrecht* zueinander und die Koordinatenwerte sind so geeicht, dass der Satz des Pythagoras auch tatsächlich immer in der Form von Gleichung (32) anwendbar ist. Ein solches Koordinatensystem nennt man *kartesisch*.

Tatsächlich impliziert die Existenz einer Distanzfunktion d gemäss Gleichung (32) auch die Existenz aller gängigen metrischen Alltagsbegriffe wie beispielsweise dem des Winkels, so dass im Falle eines kartesischen Koordinatensystems von senkrechten Koordinatenachsen gesprochen werden kann. Auch wenn verschiedene Beobachter in unterschiedlichen Inertialsystemen verschiedene kartesische Koordinatensysteme zur Beschreibung physikalischer Vorgänge spontan auswählen, so kommt dem Abstandsbegriff anscheinend eine fundamentalere, von der Wahl eines kartesischen Koordinatensystems unabhängige physikalische Bedeutung zu. $d(P_1, P_2)$ ist eine in der nicht-relativistischen Physik beobachterunabhängige Grösse. Sind die Koordinaten der Punkte $P_{1,2}$ im gestrichenen und gestrichelten kartesischen Koordinatensystem in Abbildung 8 alternativ durch $(x'_{1,2}, y'_{1,2}, z'_{1,2})$ gegeben, so gilt bei geeigneter Eichung wiederum der Satz des Pythagoras in einem weiteren

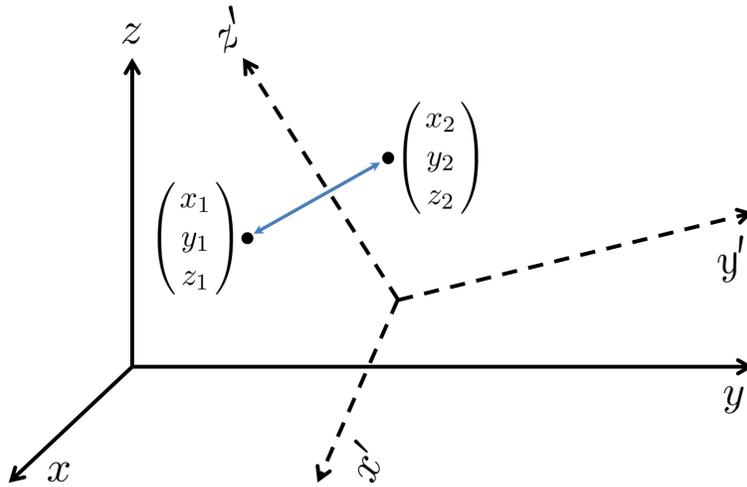


Abbildung 8: Kartesische Koordinatensysteme. Der skalare Abstand zweier Punkte ist unabhängig vom Beobachterzustand, im Gegensatz zu den einzelnen zugewiesenen (kartesischen) Koordinaten.

Inertialsystem

$$d(P_1, P_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \quad (33)$$

Diese Beobachtung ist Ausdruck einer in der Mathematik mit dem Gruppensymbol $ISO(3)$ bezeichneten *Symmetrie* der euklidischen affinen Raumes V_E^3 , nämlich der Isometriengruppe oder *Bewegungsgruppe*.

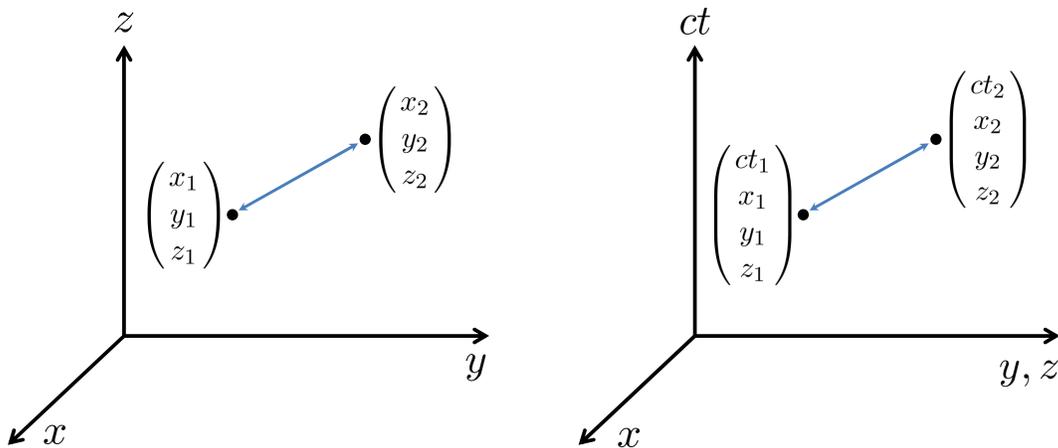


Abbildung 9: Vom dreidimensionalen euklidischen Raum zur vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit.

Fasst man nun wie einst Albert Einstein die *Zeit* als eine vierte Dimension auf und betrachtet neu die flache vierdimensionale *Raumzeit*, deren Punkte als *Ereignisse* zu einem Zeitpunkt t an einem Ort mit Koordinaten (x, y, z) interpretierbar sind, dann wird die grafische Darstellung der Begebenheiten in diesem Raum zur Herausforderung. Es sind daher in Abbildung 9 zwei räumliche Achsen zu *einer* Achse zusammengefasst. Zudem misst man die *Zeit* traditionell in einer anderen Einheit als räumliche Abstände. Wenn dieser Umstand stört, kann die *Zeit* t mit einer Geschwindigkeit c multipliziert und somit mit Hilfe von Längeneinheiten angegeben

werden. Wählt man für c schliesslich die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie eine erstaunliche Erkenntnis: Räumliche Abstände sind keine absoluten Grössen mehr, vielmehr hängen sie ähnlich wie einzelne Koordinaten eines Raumpunktes von der Lage und dem Bewegungszustand eines Beobachters ab. Allerdings tritt an die Stelle des euklidischen Abstands (32) in Inertialsystemen mit kartesischer Raumzeit-Koordinatisierung eine neue Grösse

$$s(P_1, P_2)^2 = (ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2, \quad (34)$$

welche manchmal als (quadratischer) *Minkowski-Abstand* zweier Ereignisse $P_{1,2}$ bezeichnet wird. Es stellt sich heraus, dass die durch einen Satz des Pythagoras mit 'falschen Vorzeichen' berechenbare Grösse $s(P_1, P_2)^2$ eine Art Abstand zwischen beliebigen Ereignispaaren definiert, welcher unabhängig vom Bewegungszustand inertialer Beobachter ist, welche jeweils ein kartesisches Raumzeit-Koordinatensystem eingeführt haben, sodass eben Gleichung (34) uneingeschränkt gilt. Offensichtlich ist s^2 nicht positiv definit, es ist also nicht empfehlenswert, durch Wurzelziehen aus $s(P_1, P_2)^2$ einen im üblichen Sinne zu verstehenden Abstand zu berechnen. Die Existenz der Funktion s^2 wird aus dem Einsteinschen Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen hergeleitet.

Wir wollen die Existenz des Minkowski-Abstandes hier nicht in aller Glorie herleiten, zur Begründung aber des Pudels Kern kurz beleuchten. Dazu betrachten wir zwei zueinander unrotierte Inertialsysteme IS und IS' mit gemeinsamem Raumzeitursprung, wobei sich IS' aus Sicht von IS wie in Abbildung 10 dargestellt in x - bzw. x' -Richtung mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Es ist also so, dass die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme zu einem Startzeitpunkt $t = 0$ in IS beziehungsweise $t' = 0$ in IS' übereinstimmen und in diesem Moment auch alle drei räumlichen Koordinatenachsen von IS und IS' zur Deckung kommen. Vom Ursprung ($t = t' = 0, x = x' = y = y' = z = z' = 0$) soll nun eine von einem sehr kurzen Lichtblitz ausgelöste Lichtkugelwelle ausgehen. Ein Beobachter nimmt diesen Blitz etwas später wahr, wobei die Raumzeitkoordinaten dieses Ereignisses E in IS durch (ct, x, y, z) bzw. durch (ct', x', y', z') in IS' gegeben sind. Da nun die Licht-

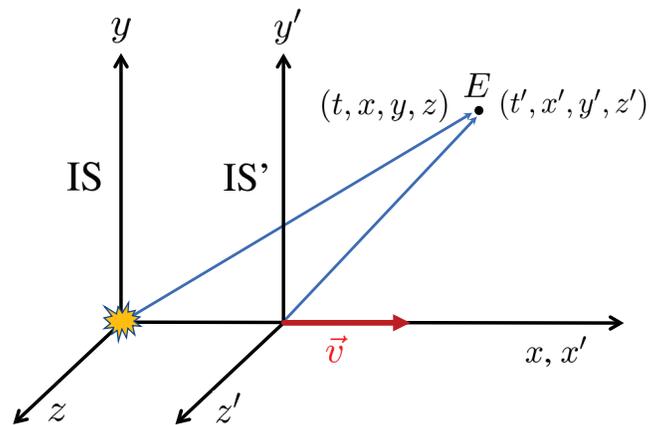


Abbildung 10: Ein kurzer Lichtblitz im gemeinsamen Raumzeitursprung von IS und IS' wird von einem Beobachter mit Koordinaten (t, x, y, z) in IS bzw. (t', x', y', z') in IS' beobachtet: Ereignis E .

geschwindigkeit c aus Sicht beider Inertialsysteme denselben Wert besitzt und der Lichtblitz vom Ursprung beider Inertialsysteme beim Startpunkt der Zeitmessung $t = t' = 0$ ausging, legt das Licht bis zum Ereignis E in IS die Strecke $r = ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und in IS' die Strecke $r' = ct' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ zurück; in beiden Inertialsystemen gilt also mit $x^0 = ct$ und $x'^0 = ct'$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ und entsprechend $x'^1 = x'$, $x'^2 = y'$, $x'^3 = z'$

$$s(\text{Lichtblitz}, E)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2. \quad (35)$$

Man zeigt schliesslich leicht, dass aus der Forderung nach Homogenität und Isotropie des flachen physikalischen Raumes mit der Feststellung $s^2 = 0$ in Gleichung (35) die allgemeine Invarianz des Minkowski-Abstandes $s(P_1, P_2)^2$ bezüglich beliebigen Inertialsystemwechseln folgt.

Die Stellung eines Koordinatenindex - wie zum Beispiel bei der obigen Zuweisung $x^2 = y$ - wird, wie wir bald sehen werden, im Gegensatz zur galileischen, nicht-relativistischen Physik in relativistischer Notation eine nichttriviale Bedeutung erlangen, und tatsächlich ist dann $x^2 = -x_2$.

Dass wir in einer Welt leben, in welcher Abstands begriffe eine Rolle spielen, ist letztlich unerklärt; in der Topologie spielt der Abstands begriff schliesslich auch keine Rolle. Offensichtlich existieren in der Natur Mechanismen, welche den Dingen eine relative Grösse verleihen. Letztlich bleibt zu bemerken, dass der Raum - beziehungsweise die Raumzeit - wohl eine reichhaltige Struktur aufweist. Im Kleinsten entpuppt sich die Raumzeit wohl als 'Quantenschaum', weder flach noch sonst in einem durch klassische Begriffe beschreibbaren Zustand. Bemerkenswerterweise mutmasste Carl Friedrich Gauss bereits in den 1820er Jahren, dass der dreidimensionale Raum gekrümmt sein könnte, eine Idee, welche später für die vierdimensionale Raumzeit im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie fruchtbare Anwendung fand.

Tatsächlich ist es trotz intensiver Bemühungen bislang nicht gelungen, eine befriedigende Quantentheorie der Raumzeit zu konstruieren, welche ja zugleich auch eine Quantentheorie der Gravitation darstellen sollte, wie es die eben dargelegten Ausführungen nahelegen. Schliesslich sollte eine solche Theorie auch noch die nicht-gravitativen Aspekte der Physik mit einbeziehen.

In den folgenden Kapiteln sollen die obigen Betrachtungen zur klassischen, flachen Raumzeit für die mathematische Anwendung formalisiert werden.

Isometriegruppen des dreidimensionalen euklidischen Vektorraumes:

$$O(3) \supset SO(3)$$

Notation

Wir betrachten einen dreidimensionalen euklidischen Vektorraum V_E^3 , der strukturell isomorph zum Koordinatenraum \mathbb{R}_R^3 mit dem Standardskalarprodukt (\cdot, \cdot) ist. V_E^3 kann als Prototyp für den physikalischen, nichtrelativistischen dreidimensionalen flachen Raum dienen, wenn auch zu bemerken ist, dass in diesem wegen der Translationsinvarianz kein Ursprung oder Nullvektor ausgezeichnet ist; ein besseres Modell für den physikalischen Raum wäre daher durch den affinen euklidischen Punktraum E_3 gegeben, welcher in einer relativistischen Theorie schliesslich zu einer vierdimensionalen Raumzeit verallgemeinert werden muss.

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}_R^3$ ist in Anknüpfung an die obigen Bemerkungen mit der Einsteinschen Summenkonvention (Summation über doppelt auftretende, oft sowohl hoch- und tiefgestellte Indizes), dem Kronecker- δ -Symbol und der üblichen Matrizenmultiplikation das Standardskalarprodukt gegeben durch

$$(x, y) := x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 = \sum_{i=1}^3 x^i y^i = x^i y_i = x^i \delta_{ij} y^j = x^T \mathbb{1}_3 y = x^T y = 'x \cdot y' = '\vec{x} \cdot \vec{y}' = 'xy', \quad (36)$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = (y^1, y^2, y^3)^T \quad (37)$$

und

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}, \quad \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 1). \quad (38)$$

Es gibt in V_E^3 eine Orthonormalbasis (ONB) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (\rightarrow Orthogonalisierungsverfahren von Erhard Schmidt) mit $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, 2, 3$. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in V_E^3 .

Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_E^3$ besitzen somit eine Darstellung

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j, \quad (39)$$

wobei nun die zwei Spaltenvektoren

$$x = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad y = (y^1, y^2, y^3)^T \quad (40)$$

als *Koordinatenvektoren* von \mathbf{x} und \mathbf{y} bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bezeichnet werden. Offensichtlich ist unter Verwendung der Linearität des Skalarprodukts

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j \rangle = x^i y^j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = x^i y^j \delta_{ij} = x^T y = (x, y). \quad (41)$$

Aktive isometrische Transformationen des euklidischen Raumes V_E^3

Wir betrachten eine lineare, isometrische Abbildung auf V_E^3 , die sogar das Skalarprodukt zwischen allen Vektoren erhält

$$\mathbf{R} : V_E^3 \xrightarrow{\text{bijektiv}} V_E^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{R}(\mathbf{x}), \quad \langle \mathbf{R}(\mathbf{x}), \mathbf{R}(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad (42)$$

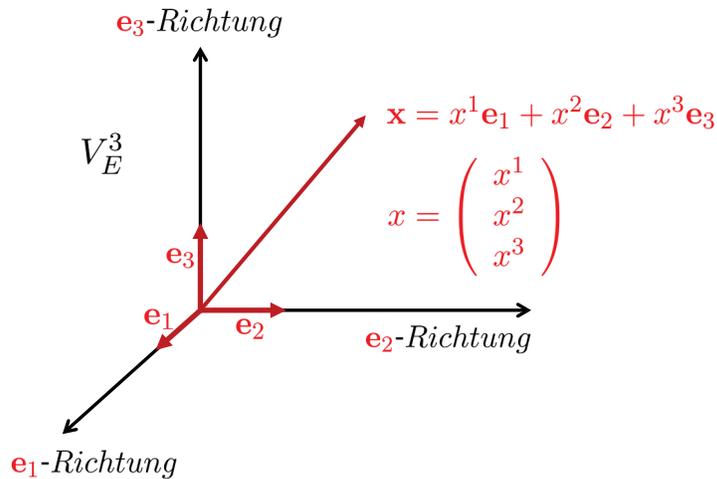


Abbildung 11: Der dreidimensionale euklidische Raum V_E^3 als Modell für dreidimensionale physikalische (Tangential-)Räume ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, welches zwei 'physikalischen' Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_E^3$ einen reellen Wert $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ zuweist. Ein[e] Physiker[in] wählt in V_E^3 spontan und mit Vorteil eine *Orthonormal-Basis* (ONB) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ mit $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, durch welche jeder Vektor $\mathbf{x} \in V_E^3$ als Linearkombination $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$ dargestellt werden kann; dabei ist $x = (x^1, x^2, x^3)^T$ der von der Beobachter-Wahl der ONB abhängige *Koordinatenvektor*. Das Normquadrat $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ ist positiv definit, es verschwindet nur für den Nullvektor. In rein mathematisch motivierten Betrachtungen wird meist darauf verzichtet, die Koordinaten mit physikalischen Einheiten zu behaften.

bezüglich einer vorgängig in V_E^3 gewählten ONB repräsentiert durch eine Matrix R

$$R = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 \end{pmatrix}, \quad R^i_j = R^{ij} = R_{ij} = R_i^j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (43)$$

wobei der linke Index i die Matrixelemente in senkrechter Richtung von oben nach unten und der rechte Index j die Matrixelemente von links nach rechts nummeriert. Die Höhe der Indizes spielt (hier!) keine Rolle. Die Koordinatenvektoren x, y und die entsprechenden Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{y} transformieren dann gemäss

$$\mathbf{x}' = R^i_j x^j \mathbf{e}_i, \quad x'^i = R^i_j x^j, \quad \mathbf{y}' = R^k_l y^l \mathbf{e}_k, \quad y'^k = R^k_l y^l, \quad (44)$$

und das Skalarprodukt bleibt unter \mathbf{R} erhalten falls für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_E^3$

$$\langle \mathbf{x}', \mathbf{y}' \rangle = R^i_j x^j R^k_l y^l \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \rangle = R^i_j R^k_l x^j y^l \delta_{ik} = R^i_j R^i_l x^j y^l = \delta_{jl} x^j y^l = (x, y) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (45)$$

erfüllt ist, d.h. es muss gelten

$$R^i_j R^i_l = \delta_{jl}, \quad \text{oder} \quad R^T R = \mathbb{1}_3 = R R^T, \quad \text{oder} \quad R^T = R^{-1}. \quad (46)$$

Eine *Symmetrie* ist in der Physik eine Transformation eines Objekts unserer Anschauung, welche Eigenschaften des Objekts erhält. Beim entsprechenden Objekt kann es sich sowohl um ein physikalisches System wie auch um eine mathematische Struktur (z.B. ein Naturgesetz) handeln. Symmetrien einer Objekteigenschaft bilden in natürlicher Weise eine (Transformations-)Gruppe.

Wir definieren daher die zur linearen Isometrie-Gruppe des dreidimensionalen euklidischen Raumes isomorphe Matrixgruppe

$$O(3) = \{R \in \text{Mat}(3, \mathbb{R}) \mid R^T R = \mathbb{1}_3\}, \quad (47)$$

welche als *orthogonale Gruppe in drei (reellen) Dimensionen* bezeichnet wird. Wegen

$$\det(R^T R) = \det(R^T) \det(R) = \det(R)^2 = \det(\mathbb{1}_3) = 1 \quad (48)$$

ist $\det(R) = \pm 1$ für $R \in O(3)$. Orthogonale Matrizen mit $\det(R) = +1$ beschreiben 'Rotationen' des euklidischen Raumes. Die entsprechende Rotationsgruppe

$$SO(3) = \{R \in Mat(3, \mathbb{R}) \mid R^T R = \mathbb{1}_3, \det(R) = 1\} \quad (49)$$

heisst *spezielle orthogonale Gruppe in drei (reellen) Dimensionen*. Die orthogonale Gruppe $O(3)$ enthält im Gegensatz zur $SO(3)$ auch 'Spiegelungen'. Die $SO(3)$ ist eng mit dem Begriff des Spins in der Quantenmechanik und der komplexen Gruppe der speziellen unitären Matrizen $SU(2)$ verknüpft.

Eine Verallgemeinerung der obigen Betrachtungen auf euklidische Vektorräume mit $\dim(V_E^n) = n \in \mathbb{N}$ ist relativ zwanglos möglich.

Passive isometrische Transformationen des euklidischen Raumes V_E^3

Unter einer *passiven Transformation* versteht man in der Physik einen Basiswechsel (Änderung des Koordinatensystems, 'Änderung des Blickwinkels'), bei welchem aber die beobachteten oder beschriebenen Objekte (im vorliegenden Fall die Vektoren) invariant bleiben.

Ersetzen wir die ONB $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ durch eine ONB' $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ gemäss $\mathbf{e}'_i = \tilde{R}_i^j \mathbf{e}_j$, so folgt für \tilde{R}

$$\delta_{ik} = \langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_k \rangle = \tilde{R}_i^j \tilde{R}_k^j \Rightarrow \tilde{R} \tilde{R}^T = \mathbb{1}_3 = \tilde{R}^T \tilde{R} \Rightarrow \tilde{R} \in O(3). \quad (50)$$

Ein Vektor $\mathbf{x} \in V_E^3$ kann in den beiden alternativen Basen ONB und ONB' durch

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k = x'^i \mathbf{e}'_i = \hat{R}^i_k x^k \mathbf{e}'_i = \hat{R}^i_k x^k \tilde{R}_i^j \mathbf{e}_j = \delta_k^j x^k \mathbf{e}_j, \quad (51)$$

dargestellt werden, also kann aus $\hat{R}^i_k \tilde{R}_i^j = \delta_k^j$ oder $\hat{R}^T \tilde{R} = \mathbb{1}_3$ gefolgert werden, dass die Koordinatenvektoren mit der invers-transponierten (also kontragredienten) Basistransformationsmatrix $(\tilde{R}^T)^{-1}$ transformiert werden, wobei hier speziell gilt

$$\hat{R} = (\tilde{R}^{-1})^T = (\tilde{R}^T)^{-1} \stackrel{!}{=} \tilde{R}. \quad (52)$$

In der Relativitätstheorie mit einer nicht-euklidischen vierdimensionalen Raumzeit ist die Situation allerdings etwas komplizierter. Dort transformieren Basisvektoren gemäss allgemein akzeptierter Sprechweise *kovariant*, die Koordinatenvektoren *kontravariant*.

Minkowski-Raum (\mathbb{M}, η)

Eigenschaften

Der Minkowski-Raum (nach Hermann Minkowski, 1907) ist ein vierdimensionaler Vektorraum, mit dessen Hilfe sich die Relativitätstheorie elegant formulieren lässt. Verbreitete Bezeichnungen für den Minkowski-Raum (oder entsprechende Koordinatenvektorräume) sind \mathbb{M} , \mathbb{M}^4 oder $\mathbb{R}^{1,3}$.

Auf \mathbb{M} ist per Definition eine reelle, nicht ausgeartete Bilinearform $\eta(\cdot, \cdot)$ definiert, die aber im Gegensatz zu einem Skalarprodukt nicht positiv definit ist.

Definition 11 Sei \mathbb{M} ein vierdimensionaler reeller Vektorraum. Das Paar (\mathbb{M}, η) ist ein Minkowski-Raum, wenn die Bilinearform $\eta : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften aufweist:

$$(M1) \quad \eta(\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \lambda \eta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \eta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{M} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Linearität})$$

$$(M2) \quad \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{M} \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(M3) \quad \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\eta \text{ nicht ausgeartet, perfekte Paarung})$$

$$(M4) \quad \eta \text{ hat die Signatur } (+, -, -, -)$$

(M4) sagt aus, dass η positiv definit auf einem höchstens eindimensionalen Untervektorraum von \mathbb{M} und negativ definit auf einem höchstens dreidimensionalen Untervektorraum von \mathbb{M} ist.

(\mathbb{M}, η) ist strukturell isomorph zum Koordinatenraum $\mathbb{R}_{\mathbb{R}}^4$ ($\mathbb{R}^{1,3}$) mit folgender Bilinearform $(\cdot, \cdot)_M$:
Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}_{\mathbb{R}}^4$ schreibt man unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention

$$(x, y)_M := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu = x^T g y, \quad (53)$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T, \quad y = \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix} = (y^0, y^1, y^2, y^3)^T \quad (54)$$

und dem metrischen Tensor (welcher *keine* Metrik und auch *kein* Skalarprodukt im ursprünglichen mathematischen Sinne definiert)

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (55)$$

Es gibt in \mathbb{M} eine 'Orthonormalbasis' $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (\rightarrow Orthogonalisierungsverfahren von Erhard Schmidt) mit $\eta(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = g_{\mu\nu}$ für $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Die $\mathbf{e}_{1,2,3}$ sind also *raumartige* Einheitsvektoren mit 'negativem Pseudo-Normquadrat' $\eta(\mathbf{e}_{1,2,3}, \mathbf{e}_{1,2,3}) = -1$, für den *zeitartigen* Einheitsvektor \mathbf{e}_0 gilt $\eta(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = 1$.

Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}$ besitzen somit eine Darstellung

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad \mathbf{y} = y^\nu \mathbf{e}_\nu, \quad (56)$$

wobei nun die zwei Spaltenvektoren

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T, \quad y = (y^0, y^1, y^2, y^3)^T \quad (57)$$

als (kontravariante, s.u.) *Koordinatenvektoren* von \mathbf{x} und \mathbf{y} bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bezeichnet werden. Offensichtlich ist unter Verwendung der Linearität des Minkowski-'Skalarprodukts'

$$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta(x^\mu \mathbf{e}_\mu, y^\nu \mathbf{e}_\nu) = x^\mu y^\nu \eta(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} = x^\mu y_\mu = x^T g y. \quad (58)$$

Elemente des Minkowski-Raumes \mathbb{M} oder Koordinatenvektoren x werden in der Physik oft als Vierervektoren bezeichnet. In Gleichung (54) wurden die sogenannten *kovarianten* Komponenten $y^* = g y$ beziehungsweise $y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu$ eines Koordinaten-Vierervektors y eingeführt, welche sich durch ein Vorzeichen im 'Raumanteil' des Vierervektors unterscheiden und mit einem tiefgestellten Index in der Komponentenschreibweise notiert werden. Die Herkunft der Beiworte *kovariant* und *kontravariant* wird unten klar werden.

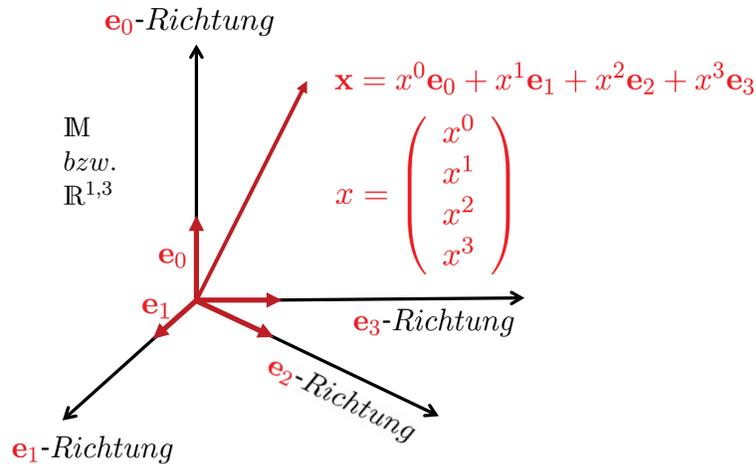


Abbildung 12: Im vierdimensionalen *pseudo*-euklidischen Minkowski-Raum \mathbb{M} wird das euklidische Skalarprodukt durch eine Bilinearform $\eta(\cdot, \cdot)$ (bzw. ein Pseudo-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$) ersetzt, welches zwei relativistischen Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}$ einen reellen Wert $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (bzw. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_M$) zuweist. In \mathbb{M} kann eine *Orthonormal-Basis* (ONB) $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ im Sinne von $\langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle_M = g_{\mu\nu}$ gewählt werden, wobei der sogenannte metrische Tensor g durch $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ und $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ gegeben ist. Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$ kann wiederum als Linearkombination $\mathbf{x} = x^0 \mathbf{e}_0 + x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$ dargestellt werden, und $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$ ist wiederum der von der Beobachter-Wahl der ONB abhängige *Koordinatenvektor* ('Vierervektor'). \mathbf{e}_0 mit $\langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle_M = 1$ zeigt in zeitliche Richtung, $\mathbf{e}_{1,2,3}$ sind raumartige Vektoren, deren 'Pseudo-Normquadrat' $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle_M = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle_M = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle_M = -1$ in der in der Literatur verbreiteten Konvention negativ ist. Es ist also $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_M = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. g alternativ mit umgekehrtem Vorzeichen zu definieren wäre ohne die beschriebene Physik zu ändern auch legitim.

Aktive 'isometrische' Transformationen des Minkowski-Raumes \mathbb{M}

Wir betrachten eine lineare Abbildung auf \mathbb{M} , welche die Minkowski-Bilinearform η auf allen Vektoren gemäss

$$\Lambda : \mathbb{M} \xrightarrow{\text{bijektiv}} \mathbb{M}, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \Lambda(\mathbf{x}), \quad \eta(\Lambda(\mathbf{x}), \Lambda(\mathbf{y})) = \eta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (59)$$

erhält, bezüglich einer ONB repräsentiert durch eine Matrix Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & \Lambda_0^3 \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & \Lambda_1^2 & \Lambda_1^3 \\ \Lambda_2^0 & \Lambda_2^1 & \Lambda_2^2 & \Lambda_2^3 \\ \Lambda_3^0 & \Lambda_3^1 & \Lambda_3^2 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Die Koordinatenvektoren x, y und die entsprechenden Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{y} transformieren dann gemäss

$$\mathbf{x}' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \mathbf{e}_\mu, \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \mathbf{y}' = \Lambda^\rho_\sigma y^\sigma \mathbf{e}_\rho, \quad y'^\rho = \Lambda^\rho_\sigma y^\sigma, \quad (61)$$

als Matrizenprodukt notiert

$$x' = \Lambda x, \quad y' = \Lambda y, \quad (62)$$

und η bleibt erhalten falls für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{M}$

$$\eta(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \Lambda^\rho_\sigma y^\sigma \eta(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\rho) = \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\rho_\sigma x^\nu y^\sigma g_{\mu\rho} = \Lambda^\mu_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma x^\nu y^\sigma = g_{\nu\sigma} x^\nu y^\sigma = (x, y)_M = \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (63)$$

erfüllt ist, d.h. es muss gelten

$$\Lambda^\mu_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma x^\nu y^\sigma = g_{\nu\sigma} x^\nu y^\sigma \quad \text{oder} \quad \Lambda^T g \Lambda = g. \quad (64)$$

Dasselbe Resultat folgt mit den Gleichungen (62) aus der kurzen Rechnung

$$(x', y')_M = x'^T g y' = (\Lambda x)^T g (\Lambda y) = x^T \underbrace{\Lambda^T g \Lambda}_g y = x^T g y = (x, y)_M \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^{1,3}. \quad (65)$$

Wir definieren daher die in der Physik als *Lorentzgruppe* bezeichnete Matrixgruppe

$$\mathcal{L} = O(1, 3) = \{\Lambda \in Mat(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g\} \quad (66)$$

welche in der Mathematik als pseudo-orthogonale Gruppe der Signatur $(1, 3)$ bezeichnet wird. Die Struktur dieser Gruppe muss aber noch einer eingehenderen Untersuchung unterzogen werden.

Aus $\Lambda^T g \Lambda = g$ folgt sofort $(\Lambda^T)^{-1} = g \Lambda g^{-1}$, wobei $g^{-1} = g^T = g$. Dies lässt sich mit $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = g_\mu^\rho = \delta_\mu^\rho$ auch in der Form

$$[(\Lambda^T)^{-1}]^\mu_\nu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\nu} = \Lambda_\mu^\nu \quad (67)$$

schreiben, wobei das Hoch-(Herunter-)Ziehen des Index ν (μ) als rein formale Schreibweise für die rechts-seitige Matrixmultiplikation von Λ mit g^{-1} und die links-seitige Multiplikation mit g zu interpretieren ist.

Lorentzgruppe

Passive isometrische Transformationen im Minkowskiraum \mathbb{M}

Ein Vierervektor \mathbf{x} im Minkowski-Raum kann als formales Skalarprodukt des Koordinatenvektors x mit dem 'Basisvektorenvektor' $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_0 \ \mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3)^T$

$$\mathbf{x} = x^0 \mathbf{e}_0 + x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = (x^0 \ x^1 \ x^2 \ x^3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = x^T \mathbf{e} \quad (68)$$

geschrieben werden. In einer Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, in der der Koordinatenvektor von \mathbf{x} durch $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ oder $x' = \Lambda x$ gegeben ist, lässt sich \mathbf{x} darstellen gemäss

$$\mathbf{x} = x'^T \mathbf{e}' = x^T \Lambda^T (\Lambda^T)^{-1} \mathbf{e}, \quad (69)$$

also transformiert die Basis mit $(\Lambda^T)^{-1} = (\Lambda^{-1})^T = g \Lambda g^{-1}$, und das Transformationsverhalten der Basis wird als *kovariant*, jenes der Koordinatenvektoren als *kontravariant* bezeichnet. Natürlich hätte man in der obigen Definition der passiven Transformation die Transformationsmatrix Λ mit $(\Lambda^T)^{-1}$ vertauschen können. Da in praktischen Rechnungen oft mit Koordinatenvektoren hantiert wird, ist eine möglichst kurze Notation für die entsprechende Transformationsmatrix von Vorteil.

Die *kovarianten* Komponenten eines Koordinatenvektors transformieren gemäss

$$x'_\mu = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma x^\sigma = g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\nu} x_\nu \quad \text{oder} \quad (gx') = g \Lambda g^{-1} (gx) = (\Lambda^{-1})^T (gx) \quad (70)$$

wie die Basis kovariant.

Im Gegensatz zum euklidischen Raum stimmt im Minkowski-Raum die Transformationsmatrix Λ der Koordinatenvektoren nicht mit der invers-transponierten, also der *kontragredienten* Matrix $(\Lambda^T)^{-1}$ überein.

Struktur der Lorentzgruppe

Wegen

$$\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(\Lambda^T) \det(g) \det(\Lambda) = \det(\Lambda)^2 \det(g) = \det g = -1 \quad (71)$$

ist $\det(\Lambda) = \pm 1$ für $\Lambda \in O(1, 3)$. Beschränkt man sich auf die Elemente in $O(1, 3)$ mit positiver Determinante, so erhält man die Untergruppe

$$\mathcal{L}_+ = SO(1, 3) = \{\Lambda \in \text{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g, \det \Lambda = 1\}, \quad (72)$$

welche *eigentliche Lorentzgruppe* genannt wird. Spalten wir eine Matrix $\Lambda \in O(1, 3)$ gemäss der Darstellung

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\mathbf{a}^T \\ -\mathbf{b} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (73)$$

auf, wobei γ eine reelle Zahl, \mathbf{a} und \mathbf{b} Spaltenvektoren und \mathbf{M} eine 3×3 -Matrix sind, so folgt nach kurzer Rechnung mit Hilfe von $(\Lambda^{-1})^T = g \Lambda g^{-1}$

$$(\Lambda^{-1})^T = \begin{pmatrix} \gamma & \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b} & \mathbf{M} \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Zudem müssen die Relationen

$$\gamma^2 - \mathbf{b}^2 = 1, \quad \mathbf{b}^T \mathbf{M} = \gamma \mathbf{a}^T, \quad \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \mathbb{1}_3 \quad (75)$$

gelten. Daraus folgt, dass $\gamma = \Lambda_0^0$ entweder ≥ 1 oder ≤ -1 ist. Es zeigt sich, dass durch

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = SO^+(1, 3) = \{\Lambda \in Mat(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T g \Lambda = g, \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \geq 1\} \quad (76)$$

wiederum eine Untergruppe der Gruppe $SO(1, 3) \subset O(1, 3)$ gegeben ist. Diese Gruppe gilt als echte Symmetriegruppe der Naturgesetze und wird *eigentliche orthochrone Lorentzgruppe* genannt. Die grösseren Gruppen $SO(1, 3)$ und $O(1, 3)$ enthalten Raum-, Zeit- und Raum-Zeit-Spiegelungen, welche tatsächlich keine Symmetriegruppen der bekannten Naturgesetze darstellen. Dennoch ist die $O(1, 3)$ für theoretische Betrachtungen wichtig.

Klassifikation der Vierervektoren

Vierektoren werden in folgende drei Klassen eingeteilt:

$$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_\mu x^\mu > 0 : \mathbf{x} \text{ (oder } x) \text{ ist zeitartig.}$$

$$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_\mu x^\mu < 0 : \mathbf{x} \text{ ist raumartig.}$$

$$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_\mu x^\mu = 0 : \mathbf{x} \text{ ist lichtartig.}$$

Wurde in \mathbb{M} eine Basis gewählt und ist durch \mathbf{e}_0 die Zeitrichtung klar, so unterscheidet man bei *zeitartigen* Vektoren:

$$x^0 > 0 : \mathbf{x} \text{ ist zukunftsgerichtet.}$$

$$x^0 < 0 : \mathbf{x} \text{ ist vergangenheitsgerichtet.}$$

Für lichtartige Vektoren gilt schliesslich:

$$x^0 > 0 : \mathbf{x} \text{ ist zukunftsgerichtet.}$$

$$x^0 < 0 : \mathbf{x} \text{ ist vergangenheitsgerichtet.}$$

$$x^0 = 0 : \mathbf{x} \text{ ist der Nullvektor.}$$

Lichtartige Vektoren stehen auf sich selbst Minkowski-senkrecht. Die Tatsache, dass ihre Minkowski-Norm $x_\mu x^\mu$ verschwindet, bedeutet natürlich nicht, dass sie (verschwindende) Nullvektoren sind (falls $x^0 \neq 0$). Allerdings nennt man im Englischen solche Vektoren nebst 'lightlike vectors' auch 'null vectors', während der eigentliche Nullvektor mit 'zero vector' bezeichnet wird.

Alle eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen erhalten die obigen Vektoreigenschaften, welche die Vektoren im Minkowskiraum in sechs verschiedene Lorentz-invariante Klassen (oder Mannigfaltigkeiten) einteilen.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für zwei zeitartige zukunftsgerichtete Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung mit verkehrtem Vorzeichen

$$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \geq \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x})\eta(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \quad (77)$$

Salopp schreiben wir künftig auch $xy = \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $x^2 = x_\mu x^\mu = \eta(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, also gilt

$$(xy)^2 \geq x^2 y^2. \quad (78)$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn \mathbf{x} und \mathbf{y} linear abhängig sind. Das Minkowski-Normquadrat ist für zeitartige Vektoren per Definition positiv, im Allgemeinen aber wie bereits erwähnt nicht definit und in diesem Sinne auch kein 'Längenquadrat'.

Minimale \mathcal{L}_+^\dagger -invariante Untermannigfaltigkeiten des Minkowski-Raumes

Figur 13 veranschaulicht die invarianten Mannigfaltigkeiten, welche entstehen, wenn alle Elemente der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe auf einem ausgewählten Punkt im Minkowski-Raum operieren. In vereinfachender Weise wird in der Notation nicht zwischen Vektoren $x \in \mathbb{M}$ und den zugehörigen kartesischen Koordinatenvektoren $x \in \mathbb{R}^{1,3}$ unterschieden. Oft werden Teilchenimpulse $p^\mu = (E/c = p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}, \vec{p})$ als Elemente eines Minkowskiraumes beschrieben, wobei die relativistische Energie-Impuls-Beziehung $c^2 p_0 p^0 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ beziehungsweise $p^2 = m^2$ für $c = 1$ die Bezeichnung "Massenschale" für die Mannigfaltigkeiten M_3^m und M_4^m motiviert.

- Zukunftslichtkegel: $M_1 = \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 = 0, x^0 > 0\}$.
- Vegangenheitslichtkegel: $M_2 = \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 = 0, x^0 < 0\}$.
- "Zukunftsmassenschale": $M_3^m = \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 = m^2 > 0, x^0 > 0\}$.
- "Vergangenheitsmassenschale": $M_4^m = \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 = m^2 > 0, x^0 < 0\}$.
- Raumartiges, einschaliges Hyperboloid: $M_5^m = \{x \in \mathbb{M} \mid x^2 = -m^2 < 0\}$.
- Nullpunkt: $M_6 = \{0\}$.

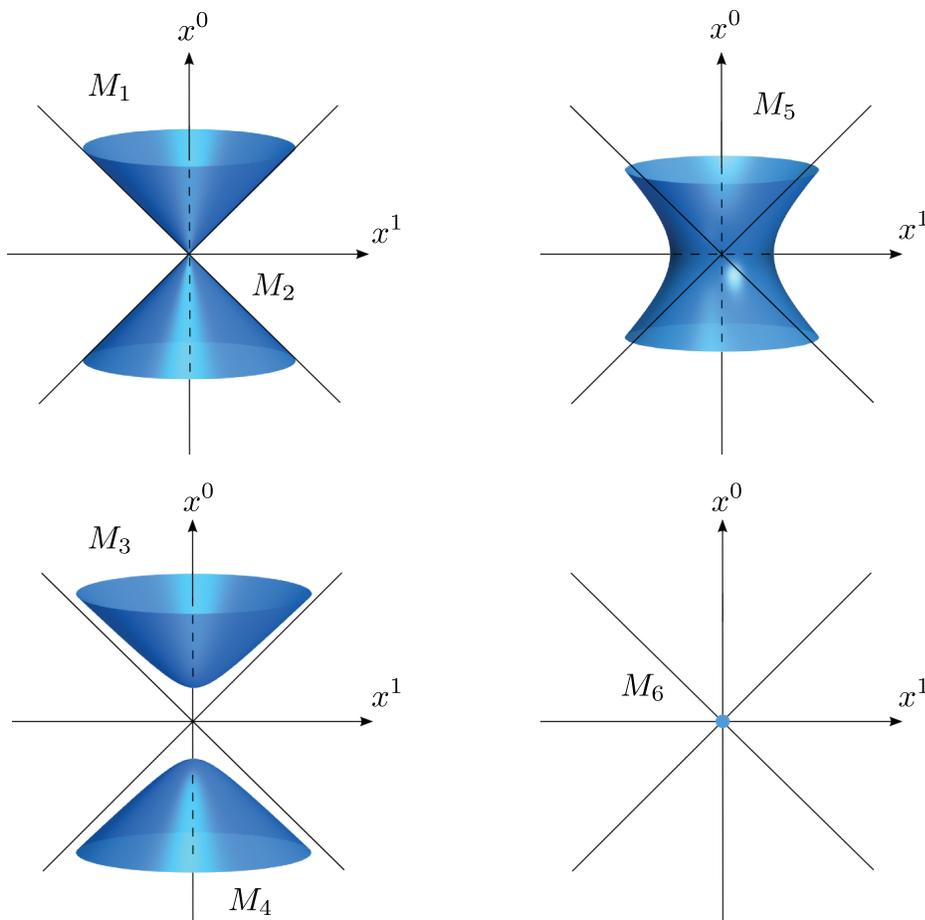


Abbildung 13: Lorentz-invariante Untermannigfaltigkeiten des Minkowski-Raumes.

Zusammenhangskomponenten und wichtige Untergruppen der Lorentzgruppe $\mathcal{L} = O(1, 3)$

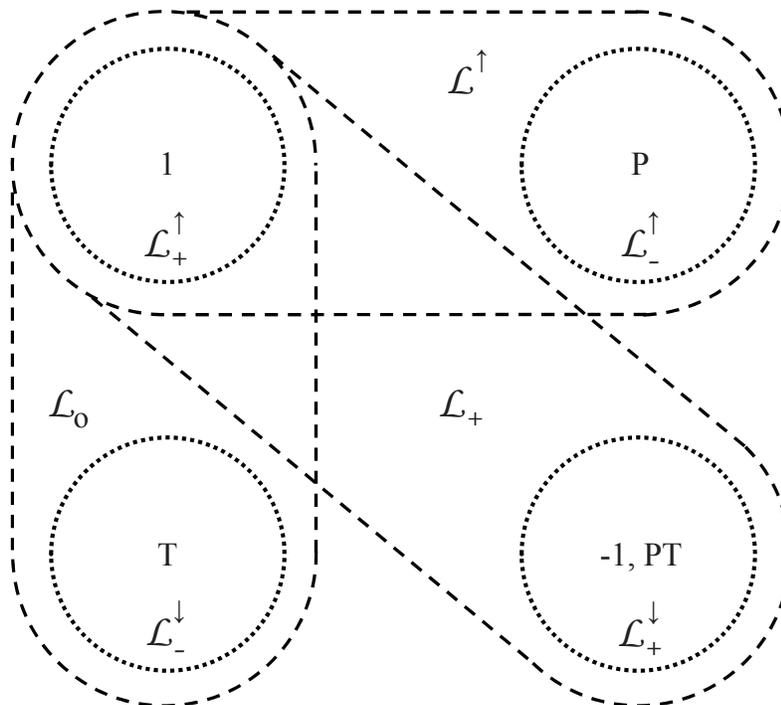


Abbildung 14: Die vier paarweise disjunkten, also nicht zusammenhängenden sowie nicht kompakten Komponenten der Lorentzgruppe $\mathcal{L} = O(1, 3)$ und entsprechende Untergruppen: Die eigentliche Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+ = SO(1, 3)$, die orthochrone Lorentzgruppe \mathcal{L}^\uparrow , die orthochore Lorentzgruppe $\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup T\mathcal{L}_+^\uparrow$ (s.u.) und die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow = SO^+(1, 3)$, welche die Identität enthält (Zusammenhangskomponente der Eins). Die Mengen \mathcal{L}_-^\downarrow , \mathcal{L}_-^\uparrow und \mathcal{L}_+^\downarrow sind natürlich *keine* Gruppen, da jeweils die Eins fehlt.

\mathcal{L}_+^\uparrow ist die Zusammenhangskomponente der Eins ($'1'$, $\mathbb{1}_4$). \mathcal{L}_-^\uparrow enthält die Raumspiegelung P mit $\det P = -1$ und \mathcal{L}_-^\downarrow die Zeitumkehr T mit $\det T = -1$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

in \mathcal{L}_+^\downarrow ist Raumzeitspiegelung $PT = -\mathbb{1}_4$ mit $\det(PT) = 1$.

Die Transformationen $\{\mathbb{1}_4, P, T, PT\}$ bilden die Kleinsche Vierergruppe V . Diese diskrete Gruppe erhält ihre volle Bedeutung erst in der Quantentheorie der Elementarteilchenphysik im Zusammenhang mit dem *CPT*-Theorem.

Die *komplexe Lorentzgruppe* $O(4, \mathbb{C}) = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{C}) \mid \Lambda^T \Lambda = \mathbb{1}_4\}$ zerfällt lediglich in zwei Zusammenhangskomponenten, charakterisiert durch $\det \Lambda = \pm 1$. Die Zusammenhangskomponente der Eins ist die $SO(4, \mathbb{C})$. Man beachte, dass die Signatur des metrischen Tensors im Komplexen keine Rolle bei der abstrakten Definition der Gruppenstruktur spielt.

Spezielle Lorentztransformationen der Raumzeit(koordinaten): Boosts

Definition und Eigenschaften

In der Teilchenphysik geht man oft davon aus, dass die im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie zu behandelnde Raumzeitkrümmung für die meisten Betrachtungen vernachlässigbar ist. Damit wird die Bühne der Physik, die Raumzeit $E_{1,3}$, zu einem *affinen Raum*. Der Begriff des affinen Raumes soll hier nicht in allzu abstrakter Weise diskutiert werden. Man kann salopp aber sagen: Ein affiner Raum ist ein Vektorraum, in welchem vergessen wurde, welches Element der Nullvektor war. Tatsächlich kann man in der Raumzeit jeden Ort und jeden Zeitpunkt als Ursprung eines geeigneten kartesischen Koordinatensystems wählen, und von jedem Raumzeitpunkt aus gesehen sieht die Raumzeit 'wie ein Minkowski-Raum' aus.

Topologisch ist die in der speziellen Relativitätstheorie betrachtete flache Raumzeit zum vierdimensionalen Raum $\mathbb{R}^{1,3} = \mathbb{R}^4$ homöomorph. Damit sei auch vorausgesetzt, dass die Raumzeit mit Hilfe von vier Koordinaten $\{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ mit $x^0 = ct$ und $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ kartesisch koordinatisierbar sei, d.h. die vom Minkowski-Raum her bekannte Pseudonorm η übertrage sich in naheliegender Weise auf die Raumzeit, so dass zwischen zwei Elementen ('Ereignissen') $x, y \in E_{1,3}$ ein 'Raumzeit-Abstandsquadrat' $(x - y)^2 := (x^0 - y^0)^2 - (x^1 - y^1)^2 - (x^2 - y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$ definiert ist. c ist dabei die Lichtgeschwindigkeit, die dafür sorgt, dass x^0 dieselbe physikalische Dimension wie die Raumkoordinaten $x^{1,2,3}$ hat. Aus Gründen der Gewohnheit werden die Raumkoordinaten x^1, x^2 und x^3 in der Folge auch mit x, y und z bezeichnet, wobei eine Verwechslung der $x = x^1$ -Koordinate mit den Viererkoordinaten des Raumzeitpunktes x kaum möglich ist. x kann also verschiedene Bedeutungen haben, man sollte es sich einfach nicht für ein v vormachen.

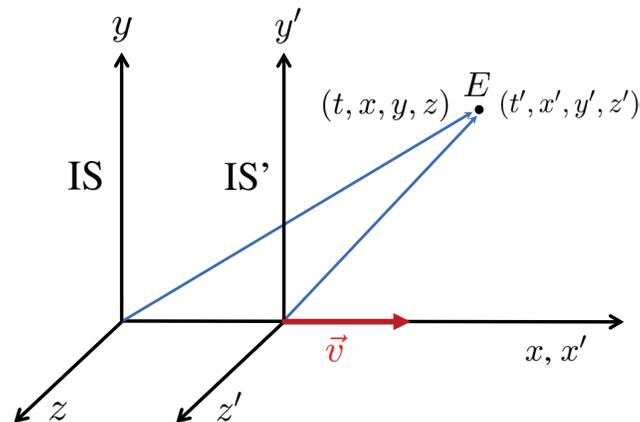


Abbildung 15: Zueinander ungedrehte Inertialsysteme IS und IS' mit Relativgeschwindigkeit \vec{v} und gemeinsamem Raumzeitkoordinatenursprung: Es ist $t' = x' = y' = z' = 0$, wo $t = x = y = z = 0$ ist.

Betrachten wir nun zwei Inertialsysteme IS und IS', von denen sich IS' bezüglich IS in positiver x -Richtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ mit ungedrehten Raumachsen bewegt (siehe Abbildung 15), so ist aus der Einführung in die spezielle Relativitätstheorie bekannt, dass die Raumzeitkoordinaten (t', x', y', z') eines Ereignisses E gemessen in IS' durch

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (80)$$

aus den Koordinaten in IS hervorgehen, wobei v gleich dem Betrag der Geschwindigkeit \vec{v} und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ eben der berühmte γ - bzw. Lorentz-Faktor ist.

Da die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum in der Physik eine fundamentale Konstante ist, ist die Messung von Geschwindigkeiten in Einheiten von c vernünftig. Mit $\vec{\beta} = \vec{v}/c = (v/c)\vec{e}_x$ und $\beta = v/c$ lässt sich das Transformationsgesetz (80) in der Form

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad x' = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda(\vec{\beta})} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \Lambda(\vec{\beta})x \quad (81)$$

mit $\Lambda(\vec{\beta}) \in SO^+(1, 3)$, wie sich leicht nachprüfen lässt, schreiben. Denkt man sich nämlich eine Lorentzmatrix durch vier Spaltenvektoren $\lambda_{0,1,2,3}^\mu = \Lambda_{0,1,2,3}^\mu$ in der Form

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \lambda_3^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \lambda_3^1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_0^3 & \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{pmatrix} \quad (82)$$

dargestellt, so impliziert die Bedingung $\Lambda^T g \Lambda = g$, dass die Spaltenvektoren $\lambda_{0,1,2,3}$ in Λ gemäss $(\lambda_\mu, \lambda_\nu)_M = g_{\mu\nu}$ zueinander paarweise Minkowski-orthonormal stehen, was in $\Lambda(\vec{\beta})$ wegen der Identität $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$ natürlich erfüllt ist.

Aus Gründen der Anschaulichkeit ist es in einigen Fällen vorteilhaft, mit der inversen Matrix

$$\Lambda = \Lambda(\vec{\beta})^{-1} = \Lambda(-\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

zu arbeiten. Diese Matrix beschreibt den Wechsel der Koordinaten von IS in ein IS', welches sich in negativer x^1 -Richtung bewegt. Aus der Sicht von IS' bewegt sich dann also IS in positiver x^1 -Richtung mit Geschwindigkeit \vec{v} .

Λ beschreibt einen *Lorentz-Boost* in x^1 -Richtung. Eine beliebige (eigentliche orthochrone) Lorentztransformation beschreibt Boosts in alle möglichen Geschwindigkeitsrichtungen und beliebige räumliche Rotationen, daher ist die $SO^+(1, 3)$ eine *sechspanparametrische* kontinuierliche (Lie-)Gruppe.

Λ kann auch mit Hilfe eines *Rapidity* genannten Boost-Parameters $\xi = \text{artanh}\beta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$ in der Form

$$\Lambda = \Lambda_{1,\xi}^B = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

geschrieben werden, welche eine direkte Analogie der Rapidity ('hyperbolische Rotation') zum Drehwinkel α einer Rotation z.B. um die x^3 -Achse herstellt

$$\Lambda_{3,\alpha}^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & +\sin \alpha & +\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Es gelten die Additionstheoreme $\Lambda_{3,\alpha_1}^R \Lambda_{3,\alpha_2}^R = \Lambda_{3,\alpha_1+\alpha_2}^R$ und $\Lambda_{1,\xi_1}^B \Lambda_{1,\xi_2}^B = \Lambda_{1,\xi_1+\xi_2}^B$.